Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Theoretische Informatik
Prof. Dr. Bernhard Beckert
Thorsten Bormer, Dr. Vladimir Klebanov, Dr. Mattias Ulbrich

Formale Systeme WS 2014/2015

Musterlösung zum Zwischentest 3 am 09.01.2015

Aufgabe 1 (3 Punkte)

Kreuzen Sie an, ob die folgenden Aussagen richtig oder falsch sind. Für jede richtige Antwort erhalten Sie einen Punkt, für jede falsche wird ein Punkt abgezogen. Sie können jedoch nicht weniger als 0 Punkte für diese Aufgabe erhalten. Wenn Sie bei einer Frage kein Kreuz setzen, so wird diese nicht gewertet.

	Richtig	**Falsch**
1. Mit einem *vollständigen* Kalkül für die Prädikatenlogik kann man für jede prädikatenlogische Formel *entscheiden*, ob sie allgemeingültig ist oder nicht.	☐	☒
2. Ergänzt man den in der Vorlesung vorgestellten Tableaukalkül um weitere Regeln, so bleibt er vollständig.	☒	☐
3. Aus den beiden Klauseln $\{p(x)\}$ und $\{\neg p(f(x))\}$ kann die leere Klausel im Resolutionskalkül abgeleitet werden.	☒	☐

Zur Begründung:

1. Die Allgemeingültikeit der Prädikatenlogik ist nicht entscheidbar, sondern nur semi-entscheidbar, d.h., die allgemeingültigen Formeln sind nur rekursiv aufzählbar. Ein vollständiger Kalkül kann für jede allgemeingültige Formel feststellen, dass sie allgemeingültig ist. Er kann aber nicht immer feststellen, dass eine nicht allgemeingültige Formel nicht allgemeingültig ist.
2. Jeder Beweis, der keinen Gebrauch von den neuen Regeln macht, bleibt weiterhin gültig.
3. Nach Variantenbildung $p(x_1)$ und $\neg p(f(x_2))$ sind die beiden Klauseln zur leeren Klausel resolvierbar vermittels $\sigma = \{x_1/f(x_2)\}$.

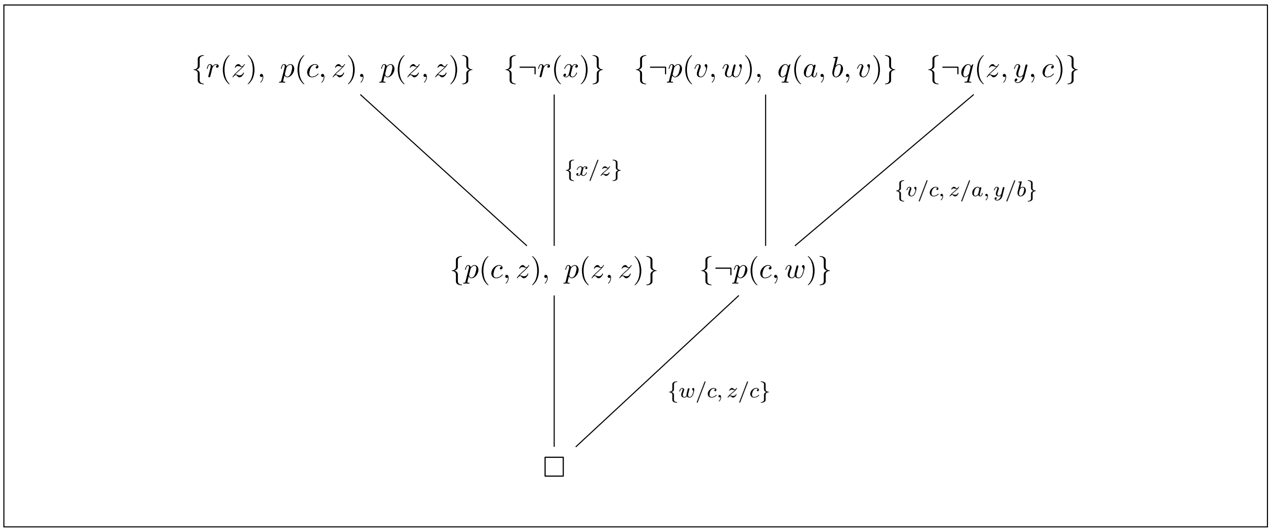
Aufgabe 2 (3 Punkte)

Zeigen Sie mittels Resolution, dass die Menge folgender Klauseln unerfüllbar ist.

Notieren Sie Ihren Beweis so, dass bei jeder neu entstehenden Klausel klar erkennbar ist, aus welchen Elternklauseln sie entsteht und welche Substitution verwendet wurde.

Signatur: p, q, r sind Prädikate; a, b, c sind Konstanten; v, w, x, y, z sind Variablen.

$$\{r(z),\ p(c,z),\ p(z,z)\} \qquad \{\neg p(v,w),\ q(a,b,v)\} \qquad \{\neg q(z,y,c)\} \qquad \{\neg r(x)\}$$



Aufgabe 3 (4 Punkte)

Vervollständigen Sie den folgenden, noch nicht geschlossenen, Tableaubeweis. **Notieren Sie** dabei:

- bei jeder Erweiterung, durch welche Regelanwendung eine Formel auf dem Tableau enstanden ist,
- bei Abschlüssen die beiden Partner,
- die schließende Substitution.

$$0\exists x\ (q(x) \to p(x))\ {}_{1}$$

$$1(\exists x \forall y\ (p(x) \land p(f(y)))) \lor (\exists x \exists y\ \neg(q(y) \lor q(f(x))))\ {}_{2}$$

$$0(q(X_1) \to p(X_1))\ {}_{3[\gamma(1)]}$$

$$1q(X_1)\ {}_{4[\alpha(3)]}$$

$$0p(X_1)\ {}_{5[\alpha(3)]}$$

$$1\exists x.\forall y.(p(x) \land p(f(y)))\ {}_{6[\beta(2)]}$$

$$1\forall y.(p(c) \land p(f(y)))\ {}_{8[\delta(6)]}$$

$$1p(c) \land p(f(X_2))\ {}_{9[\gamma(8)]}$$

$$1p(c)\ {}_{10[\alpha(9)]}$$

$$1p(f(X_2))\ {}_{11[\alpha(9)]}$$

$$*_{5,\ 11}$$

$$1\exists x.\exists y.\neg(q(y) \lor q(f(x)))\ {}_{7[\beta(2)]}$$

$$1\exists y.\neg(q(y) \lor q(f(d)))\ {}_{12[\delta(7)]}$$

$$1\neg(q(e) \lor q(f(d)))\ {}_{13[\delta(12)]}$$

$$0(q(e) \lor q(f(d)))\ {}_{14[\alpha(13)]}$$

$$0q(e)\ {}_{15[\alpha(14)]}$$

$$0q(f(d))\ {}_{16[\alpha(14)]}$$

$$*_{4,16}$$

Die Konstanten c, d, e gehen aus der Skolemisierung hervor.
Schließende Substitution ist $\sigma = \{X_1/f(d), X_2/d\}$