Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Theoretische Informatik
Prof. Dr. Bernhard Beckert
Thorsten Bormer, Dr. Vladimir Klebanov, Dr. Mattias Ulbrich

Formale Systeme, WS 2014/2015

Übungsblatt 1

Dieses Übungsblatt wird in der Übung am 31.10.2014 besprochen.

Aufgabe 0

Melden Sie sich bei unserem Forum an (unter `http://formal.iti.kit.edu/teaching/FormSysWS1415/forum/`) und machen sich mit den Funktionen des Forums vertraut. Im Forum können Sie Fragen zur Vorlesung stellen, welche von Ihren Kommilitonen und uns gelesen und beantwortet werden. Bitte beachten Sie, dass die Praxisaufgaben eigenständig bearbeitet werden müssen, und insofern insbesondere keine (Teil-)Lösungen zu den Praxisaufgaben im Forum gepostet werden dürfen.

Aufgabe 1

(a) Zeigen Sie, dass folgende Formel erfüllbar ist, indem Sie ein Modell angeben.

$$((A \to (A \land \neg A)) \lor (A \leftrightarrow B)) \to B$$

(b) Zeigen Sie durch aussagenlogische Umformungen, dass folgende Formel unerfüllbar ist.

$$(\neg A \land (A \lor \neg A)) \land (\neg(A \leftrightarrow B) \land \neg B)$$

(c) Überprüfen Sie, ob folgende Formeln Tautologien sind. Begründen Sie Ihre Antwort.

(i) $(A \to B) \to ((B \to C) \to (A \to C))$

(ii) $(A \land \neg A \to B) \land C$

Lösung zu Aufgabe 1

(a) Wir suchen eine Interpretation, die die Formel wahr macht: Die Implikation wird unter anderem dann wahr, wenn B wahr ist, d. h. wenn $I(B) = W$ gilt. In diesem Fall beeinflusst die Wahl von A die Auswertung der Formel nicht mehr, d. h. z. B. ist $I(A) = F$ und $I(B) = W$ ein Modell der Formel.

(b)

$$
\begin{aligned}
&(\neg A \land (A \lor \neg A)) \land (\neg(A \leftrightarrow B) \land \neg B) \equiv && \text{(tertium non datur)}\\
&(\neg A \land \mathbf{1}) \land (\neg(A \leftrightarrow B) \land \neg B) \equiv && \text{(Biimplikation, De Morgan)}\\
&\neg A \land (((A \land \neg B) \lor (B \land \neg A)) \land \neg B) \equiv && \text{(Distrib., Idem.)}\\
&\neg A \land ((A \land \neg B) \lor (B \land \neg A \land \neg B)) \equiv &&\\
&\neg A \land (A \land \neg B) \equiv &&\\
&\mathbf{0} &&
\end{aligned}
$$

(c) (i) Wir zeigen, dass $(A \to B) \to ((B \to C) \to (A \to C))$ eine Tautologie ist.
Fall 1: Ist die Prämisse $(A \to B)$ falsch, dann ist die Formal insgesamt wahr.
Fall 2: Sei also $A \to B$ wahr. Nun gilt es, zu zeigen, dass $(B \to C) \to (A \to C)$ auch wahr ist. Dies ist trivial gegeben, wenn
(Fall 2 a) $B \to C$ falsch ist.
(Fall 2 b) Sei also $B \to C$ wahr. Dann folgt – wegen der Transitivität der Implikation – aus $A \to B$ und $B \to C$, dass auch $A \to C$ wahr ist.

(ii) Interpretationen I mit $I(C) = F$ erfüllen $(A \land \neg A \to B) \land C$ nicht. Daher ist diese Aussage keine Tautologie.

Aufgabe 2

Formen Sie die folgenden Formeln in die disjunktive sowie konjunktive Normalform um. Verwenden Sie dafür die in der Vorlesung vorgestellten Äquivalenzen. Kennzeichnen Sie klar die durchgeführten Schritte.

(a) $p \to (p \to q)$

(b) $(p \to q) \land (q \to s)$

(c) $(p \to (\neg p \lor q)) \land \neg(p \to q)$

(d) $(p \land \neg(q \land r)) \lor (\neg p \land \neg((q \land r) \lor \neg q))$

Lösung zu Aufgabe 2

Generelle Vorgehensweise: (1) Biimplikationen und Implikationen auflösen, (2) NNF herstellen, (3) Distributivgesetz anwenden, dabei stets (4) Zwischenergebnisse vereinfachen (Idempotenz, Absorption, tertium non datur, usw.).

Beachten Sie, daß Normalformen im Allgemeinen nicht eindeutig sind. Andere Rechenwege können also zu anderen Ergebnissen führen.

(a) DNF:

$$\begin{aligned}
&p \to (p \to q) \equiv \\
&\neg p \lor (\neg p \lor q) \equiv \quad \text{(Idempotenz)} \\
&\neg p \lor q
\end{aligned}$$

Dies ist auch die KNF.

(b) KNF:

$$(p \to q) \land (q \to s) \equiv (\neg p \lor q) \land (\neg q \lor s)$$

DNF:

$$\begin{aligned}
&(p \to q) \land (q \to s) \equiv \\
&(\neg p \lor q) \land (\neg q \lor s) \equiv && \text{(Distr.)} \\
&((\neg p \lor q) \land \neg q) \lor ((\neg p \lor q) \land s) \equiv && \text{(Distr.)} \\
&(\neg p \land \neg q) \lor (q \land \neg q) \lor (\neg p \land s) \lor (q \land s) \equiv \\
&(\neg p \land \neg q) \lor \qquad\qquad\quad (\neg p \land s) \lor (q \land s)
\end{aligned}$$

(c) DNF:

$$\begin{aligned}
&(p \to (\neg p \lor q)) \land \neg(p \to q) \equiv \\
&(\neg p \lor (\neg p \lor q)) \land \neg(\neg p \lor q) \equiv && \text{(Idem.)} \\
&(\neg p \lor q) \land \neg(\neg p \lor q) \equiv && \text{(man sieht nun direkt)} \\
&\mathbf{0}
\end{aligned}$$

Als Schreibweise für die DNF würde man an dieser Stelle die leere Disjunktion $\lor$ benutzen. Dies ist auch die KNF. Achtung: Die leere Konjunktion $\land$ entspricht dagegen einer allgemeingültigen Formel.

(d) DNF:

$$
\begin{aligned}
&(p \wedge \neg(q \wedge r)) \vee (\neg p \wedge \neg((q \wedge r) \vee \neg q)) \equiv && \text{(De Morgan)}\\
&(p \wedge (\neg q \vee \neg r)) \vee (\neg p \wedge ((\neg q \vee \neg r) \wedge q) \equiv && \text{(Distr.)}\\
&(p \wedge \neg q) \vee (p \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg r \wedge q) \equiv &&\\
&(p \wedge \neg q) \vee (p \wedge \neg r) \vee \qquad\qquad\qquad\quad (\neg p \wedge \neg r \wedge q) &&
\end{aligned}
$$

KNF:

$$
\begin{aligned}
&(p \wedge \neg(q \wedge r)) \vee (\neg p \wedge \neg((q \wedge r) \vee \neg q)) \equiv && \text{(De Morgan)}\\
&(p \wedge (\neg q \vee \neg r)) \vee (\neg p \wedge ((\neg q \vee \neg r) \wedge q) \equiv && \text{(Distr.)}\\
&(p \wedge (\neg q \vee \neg r)) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg r \wedge q) \equiv &&\\
&(p \wedge (\neg q \vee \neg r)) \vee \qquad\qquad\qquad\quad (\neg p \wedge \neg r \wedge q) \equiv && \text{(Distr.)}\\
&(p \vee \neg p) \wedge (p \vee \neg r) \wedge (p \vee q) \wedge (\neg q \vee \neg r \vee \neg p) \wedge (\neg q \vee \neg r \vee \neg r) \wedge (\neg q \vee \neg r \vee q) \equiv &&\\
&\qquad (p \vee \neg r) \wedge (p \vee q) \wedge (\neg q \vee \neg r \vee \neg p) \wedge (\neg q \vee \neg r) \equiv && \text{(Absorp.)}\\
&\qquad (p \vee \neg r) \wedge (p \vee q) \wedge (\neg q \vee \neg r) \equiv && \text{(Transitivität d. Impl.)}\\
&\qquad\qquad (p \vee q) \wedge (\neg q \vee \neg r) &&
\end{aligned}
$$

Aufgabe 3

Geben Sie zwei Formeln A und B so an, dass $A \to B$ eine Tautologie ist und dass es mindestens zwei nicht äquivalente Interpolanten für $A \to B$ gibt. Geben Sie für Ihr Beispiel zwei solche Interpolanten an und zeigen Sie, dass diese tatsächlich Interpolanten von $A \to B$ sind.

Lösung zu Aufgabe 3

Seien $A \equiv P_1 \land P_2 \land P_3$ und $B \equiv P_1 \lor P_2 \lor P_4$.

Zunächst zeigen wir: $A \to B$ ist eine Tautologie. Für $\mathrm{val}_I(P_1) = F$ ist $\mathrm{val}_I(A) = F$ und damit die Implikation trivialer Weise erfüllt. Für $\mathrm{val}_I(P_1) = W$ ist anderseits $\mathrm{val}_I(B) = W$ und damit die Implikation ebenfalls erfüllt.

Die Argumentation zeigt eigentlich schon: P_1 ist eine Interpolante für $A \to B$, denn

- P_1 ist in A und B enthalten und
- offensichtlich gilt sowohl $A \to P_1$ als auch $P_1 \to B$.

Aus dem selben Grund ist aber auch P_2 eine Interpolante. $P_1 \land P_2$ und $P_1 \lor P_2$ sind weitere Interpolanten.

Aufgabe 4

Zeigen Sie:

Sind C_1 und C_2 Interpolanten für die Implikation $A \to B$, dann sind auch $C_1 \lor C_2$ und $C_1 \land C_2$ Interpolanten für $A \to B$.

Lösung zu Aufgabe 4

Seien C_1 und C_2 Interpolanten der Tautologie $A \to B$. Es gilt:

- $A \to C_1$ und
- $A \to C_2$, weil C_i Interpolaten sind, und
- $C_1 \to (C_1 \lor C_2)$, weil es eine AL-Tautologie ist.

Aus den ersten beiden Aussagen folgt bereits $A \to (C_1 \land C_2)$ und aus der ersten und dritten schon $A \to (C_1 \lor C_2)$. Die beiden anderen Aussagen folgen ziemlich analog aus:

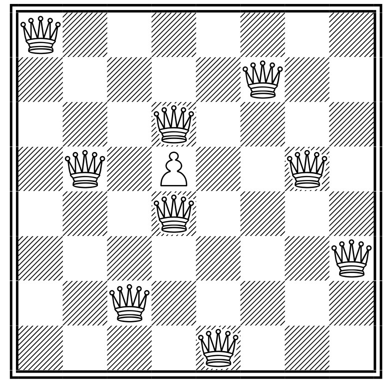
- $C_1 \to B$,
- $C_2 \to B$ und
- $(C_1 \land C_2) \to C_1$.

Aus den ersten beiden folgt $(C_1 \lor C_2) \to B$ und aus dem ersten und dritten $(C_1 \land C_2) \to B$.

Offensichtlich kommt jede aussagenlogische Variable in $C_1 \land C_2$ und $C_2 \lor C_1$ sowohl in A als auch in B vor.

Aufgabe 5 (Zusatzaufgabe)

Eine Abwandlung des sogenannten *8-Damen-Problems* (siehe Skriptum) ist das *9-Damen-Problem*: Es geht darum, neun Damen so auf einem üblichen Schachbrett zu plazieren, daß sie sich gegenseitig nicht bedrohen. Bei 9 Damen ist dies jedoch nur möglich, wenn sich zusätzlich ein Bauer auf dem Brett befindet. Steht der Bauer auf gerader Linie zwischen zwei Damen, so bedrohen sich diese nicht. Eine mögliche Lösung des Problems zeigt die Abb. rechts.



Formalisieren Sie das 9-Damen-Problem als ein Erfüllbarkeitsproblem der Aussagenlogik. Orientieren Sie sich dabei an der Lösung des 8-Damen-Problems aus dem Skriptum.

Lösung zu Aufgabe 5

Wir führen für jedes Feld des Schachbretts eine Boolesche Variable $D_{i,j}$ ein, mit der Vorstellung, dass $D_{i,j}$ genau dann den Wert *wahr* hat, wenn auf dem Feld (i,j) eine Dame steht. Zusätzlich führen wir für jedes Feld des Schachbretts eine Boolesche Variable $B_{i,j}$ ein, mit der Vorstellung, dass $B_{i,j}$ genau dann den Wert *wahr* hat, wenn auf dem Feld (i,j) der Bauer steht.

Schreibweise. Im folgenden schreiben wir

$$\bigwedge_{i:b(i)} \phi(i)$$

als Abkürzung für eine endliche Konjunktion der aussagenlogischen Formeln $\phi(i)$, für die gilt, dass

- $1 \leq i \leq 8$,
- die Bedingung $b(i)$ ist erfüllt.

Dabei ist i eine Variable auf der Metaebene, und b ist eine Formel der Metaebene.

Zudem steht $\bigvee_i \phi(i)$ für $\bigvee_{i:true} \phi(i)$; $\bigvee_{i:false}$ steht für *false*; $\bigwedge_{i:false}$ steht für *true*; und Abkürzungen wie $\bigvee_{i,j:b(i,j)} \phi(i,j)$ mit mehreren Variablen sind analog definiert.

Struktur der Formalisierung. Wir formalisieren das Problem als eine aussagenlogische Formel

$$A = A_1 \wedge A_2 \wedge A_3 \wedge A_4$$

Die drei Teilformeln sind jeweils wie folgend.

Genau ein Bauer steht auf dem Brett.

$$A_1 = \bigvee_{x,y} \left(B_{x,y} \wedge \bigwedge_{i,j:(i,j)\neq(x,y)} \neg B_{i,j} \right)$$

Genau neun Damen stehen auf dem Brett. Sei

$$M = \{(i,j) \mid 1 \leq i,j \leq 8\}$$

die Menge aller Felder des Bretts. Damit kodiert folgende Formel die Tatsache, dass es genau 9 Damen auf dem Brett gibt:

$$A_2 = \bigvee_{S: S \subset M, \#S = 9} \left(\bigwedge_{i,j:(i,j)\in S} D_{i,j} \wedge \bigwedge_{i,j:(i,j)\notin S} \neg D_{i,j} \right)$$

(Wir haben dabei die Schreibweise der endlichen Disjuktion auf eine naheliegende Weise „mißbraucht“.)

Auf keinem Feld stehen Bauer und Dame zugleich.

$$A_4 = \bigwedge_{i,j} \neg(B_{i,j} \wedge D_{i,j})$$

Es gibt keine Bedrohung zwischen zwei Damen. Wir ordnen die Bedrohungen nach Reihen, Spalten, Haupt- und Nebendiagonalen:

$$A_3 = \mathit{Reihen} \wedge \mathit{Spalten} \wedge \mathit{Diag}^+ \wedge \mathit{Diag}^-$$

Die folgende Formel besagt, dass, falls zwei Damen in der gleichen Reihe stehen, der Bauer dazwischen stehen muss:

$$\mathit{Reihen} = \bigwedge_{i,i',j:\, i<i'} \left((D_{i,j} \wedge D_{i',j}) \to \bigvee_{i'':\, i<i''<i'} B_{i'',j} \right)$$

Das gleiche für Spalten, Haupt- und Nebendiagonalen:

$$\begin{aligned}
\mathit{Spalten} &= \bigwedge_{i,j,j':\, j<j'} \left((D_{i,j} \wedge D_{i,j'}) \to \bigvee_{j'':\, j<j''<j'} B_{i,j''} \right) \\
\mathit{Diag}^+ &= \bigwedge_{i,j,i',j':\, i<i',\, i'-i=j'-j} \left((D_{i,j} \wedge D_{i',j'}) \to \bigvee_{i'',j'':\, i<i''<i',\, i''-i=j''-j} B_{i'',j''} \right) \\
\mathit{Diag}^- &= \bigwedge_{i,j,i',j':\, i<i',\, i'-i=j-j'} \left((D_{i,j} \wedge D_{i',j'}) \to \bigvee_{i'',j'':\, i<i''<i',\, i''-i=j-j''} B_{i'',j''} \right)
\end{aligned}$$

Fazit. Insgesamt hat das 9-Damen-Problem eine Lösung, wenn die aussagenlogische Formel

$$A = A_1 \wedge A_2 \wedge A_3 \wedge A_4$$

erfüllbar ist. Jedes Modell der Formel ergibt eine zulässige Konfiguration der Figuren auf dem Brett.