Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Theoretische Informatik
Prof. Dr. Bernhard Beckert
Thorsten Bormer, Dr. Vladimir Klebanov, Dr. Mattias Ulbrich

Formale Systeme, WS 2014/2015

Übungsblatt 11

Dieses Übungsblatt wird in der Übung am 23.01.2015 besprochen.

Aufgabe 1

Gegeben sei die Relation $\succ = \{(a,b),(b,d),(c,b),(d,a),(d,e)\}$.

(a) Bestimmen Sie

  (i) $\to$ (die reflexive, transitive Hülle von $\succ$),

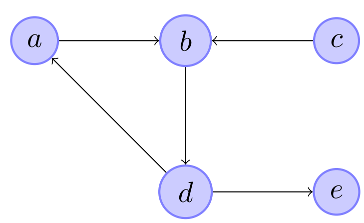
  (ii) $\overset{+}{\to}$ (die transitive Hülle von $\succ$) und

  (iii) $\leftrightarrow$ (die reflexive, transitive, symmetrische Hülle von $\succ$).

(b) Zeigen Sie, dass $\succ$ lokal konfluent sowie konfluent ist.

(c) Erweitern Sie die Relation $\succ$ um ein Tupel, so dass sie zwar lokal konfluent bleibt, aber nicht mehr konfluent ist.

Lösung zu Aufgabe 1



(a)

$$\text{Die transitive Hülle } \overset{+}{\to} = \{(a,a),(a,b),(a,d),(a,e),\\ (b,a),(b,b),(b,d),(b,e),\\ (c,a),(c,b),(c,d),(c,e),\\ (d,a),(d,b),(d,d),(d,e)\} \ .$$

$$\text{Die reflexive, transitive Hülle } \to = \{(a,a),(a,b),(a,d),(a,e),\\ (b,a),(b,b),(b,d),(b,e),\\ (c,a),(c,b),\boldsymbol{(c,c)},(c,d),(c,e),\\ (d,a),(d,b),(d,d),(d,e),\\ \boldsymbol{(e,e)}\} \ .$$

$$\text{Die reflexive, transitive, symmetrische Hülle } \leftrightarrow = \{a,b,c,d,e\} \times \{a,b,c,d,e\} \ .$$

(b) Die Knoten a, b, c, e haben nicht mehr als einen Nachfolger bzgl. $\succ$: an diesen Stellen ist somit keine Divergenz möglich.

Der Knoten d hat zwei unmittelbare Nachfolger: a und e. Wegen $a \xrightarrow{+} e$ (s.o.) ist $\succ$ lokal konfluent.

Ebenfalls ist $\succ$ konfluent, da von allen Knoten aus, die von d erreichbar sind (a, b, d, e), der Knoten e erreichbar ist.

(Nota bene: Der Satz, dass jedes noethersche und lokal konfluente Reduktionssystem konfluent ist, ist hier nicht anwendbar, da die Relation nicht noethersch ist.)

(c) Wir fügen einen neuen Knoten f, sowie das Paar (a, f) hinzu. Die einzige neue Divergenz ist $f \prec a \succ b$. Wegen $b \xrightarrow{+} a \xrightarrow{+} f$ bleibt $\succ$ lokal konfluent. Die neue Relation ist aber nicht konfluent, da $b \xrightarrow{+} e$ gilt, und weder f noch e Nachfolger bzgl. $\succ$ haben.

Aufgabe 2

Seien $N := \mathbb{N} \setminus \{1, 0\}$ und $N' := \mathbb{N} \setminus \{0\}$ Teilmengen der natürlichen Zahlen. Die Relation $\succ \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ ist definiert als

$$a \succ b \quad :\Longleftrightarrow \quad b \text{ teilt } a \text{ und } a \neq b \qquad (a, b \in \mathbb{N}).$$

Betrachten Sie nun die Reduktionssysteme $(N, \succ)$ und $(N', \succ)$:

(a)	Ist $(N, \succ)$ lokal konfluent?	Ist $(N', \succ)$ lokal konfluent?
(b)	Ist $(N, \succ)$ konfluent?	Ist $(N', \succ)$ konfluent?
(c)	Ist $(N, \succ)$ noethersch?	Ist $(N', \succ)$ noethersch?
(d)	Besitzt $(N, \succ)$ irreduzible Elemente? Wenn ja, welche?	Besitzt $(N, \succ)$ irreduzible Elemente? Wenn ja, welche?

Begründen Sie Ihre Antworten kurz.
Bemerkung: Mit $\succ$ ist jeweils die Einschränkung auf $N \times N$ bzw. $N' \times N'$ gemeint.

Lösung zu Aufgabe 2

Betrachten wir zunächst nur $(N, \succ)$

(a) Es gilt:

$$6 \succ 2, \; 6 \succ 3$$

Aber 2 und 3 sind irreduzible Elemente, weil sie keine echten Teiler größer 1 haben. Also ist das Reduktionssystem **nicht** lokal konfluent.

(b) ... und damit natürlich auch nicht konfluent.

(c) Aus $n \succ m$ folgt, dass $n > m$. In $\mathbb{N}$ kann es aber keine unendliche absteigende Kette geben ($(\mathbb{N}, >)$ ist noethersch), also ist $(N, \succ)$ noethersch.

(d) Die irreduziblen Elemente sind gerade die natürlichen Zahlen, die keine natürlichen Teiler haben außer 1 und sich selbst, also die Primzahlen.

Hier fällt der Begriff irreduzibel mit dem aus der Algebra/Zahlentheorie zusammen.

Desweiteren nun die Betrachtung für $(N', \succ)$: 1 ist Teiler jeder positiven natürlichen Zahl, also gilt, dass: $n \succ 1$ für alle $n \in N'$.

(a) folgt aus (b).

(b) Sei $n \succ m_1$ und $n \succ m_2$. Dann ist wegen $m_1 \succ 1$ und $m_2 \succ 1$ die Konfluenz gegeben.

(c) Das Argument von oben greift auch hier.

(d) 1 ist das einzig irreduzible Element.

Aufgabe 3

Die Ackermann-Funktion ist eine rekursive Funktion, die für ihr außergewöhnlich schnelles Wachstum bekannt ist. Man könnte sie so programmieren:

```
nat A(nat x, nat y) {
   if (x==0) return y+1;
   else if (y==0) return A(x-1,1);
      else return A(x-1, A(x,y-1));
}
```

Finden Sie eine geeignete Ordnung auf $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, um mit Noetherscher Induktion zu zeigen, dass die Ackermann-Funktion für alle Eingaben terminiert.

Lösung zu Aufgabe 3

Zur Erinnerung das Prinzip der noetherschen Induktion:

Es sei $X \subseteq D$, so dass für alle $a \in D$ gilt

$$\underbrace{\{b \mid a \succ b\} \subseteq X}_{\text{Induktionsannahme}} \Rightarrow a \in X.$$

Dann ist $X = D$.

Wir benutzen die lexikographische Ordnung auf $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, d.h., es gelte $(m_1, m_2) \succ (n_1, n_2)$ genau dann, wenn

- $m_1 > n_1$ oder
- $m_1 = n_1$ und $m_2 > n_2$.

Die Relation $\succ$ ist offensichtlich noethersch mit dem minimalen Element $(0, 0)$.

Sei $X \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ die Menge aller Eingabepaare, für die die Ackermann-Funktion terminiert. Wir zeigen mittels noetherscher Induktion, dass $X = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

Sei nun also $(a_x, a_y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ beliebig, und es gelte $(b_x, b_y) \in X$ für alle (b_x, b_y) mit $(a_x, a_y) \succ (b_x, b_y)$ (Induktionsannahme). Wir müssen zeigen, dass daraus $(a_x, a_y) \in X$ folgt.

1. Fall: $a_x = 0$
$(0, a_y) \in X$ für alle $a_y \in \mathbb{N}$. Dies ergibt sich aus dem Programm (ohne Verwendung der Induktionsannahme).

2. Fall: $a_x \neq 0, a_y = 0$
Aus dem Programm ersehen wir, dass $A(a_x, 0) = A(a_x - 1, 1)$. Da $(a_x, 0) \succ (a_x - 1, 1)$, folgt aus der Induktionsannahme, dass $(a_x - 1, 1) \in X$. Damit ist auch $(a_x, 0) \in X$, da $A(a_x, 0)$ nur einen Schritt mehr macht als $A(a_x - 1, 1)$.

3. Fall: $a_x \neq 0, a_y \neq 0$

Es gilt $(a_x, a_y) \succ (a_x, a_y - 1)$ und somit per Induktionsannahme $(a_x, a_y - 1) \in X$. Also terminiert $A(a_x, a_y - 1)$.

Es gilt aber auch $(a_x, a_y) \succ (a_x - 1, b_y)$ für alle b_y. Dies gilt insbesondere für $b_y = A(a_x, a_y - 1)$. Also ist $(a_x - 1, A(a_x, a_y - 1)) \in X$, was bedeutet, dass $A(a_x, a_y) = A(a_x - 1, A(a_x, a_y - 1))$ terminiert.