Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Theoretische Informatik
Prof. Dr. Bernhard Beckert
Thorsten Bormer, Dr. Vladimir Klebanov, Dr. Mattias Ulbrich

Formale Systeme, WS 2014/2015

Übungsblatt 11

Dieses Übungsblatt wird in der Übung am 23.01.2015 besprochen.

Aufgabe 1

Gegeben sei die Relation $\succ = \{(a,b),(b,d),(c,b),(d,a),(d,e)\}$.

(a) Bestimmen Sie

  (i) $\rightarrow$ (die reflexive, transitive Hülle von $\succ$),

  (ii) $\xrightarrow{+}$ (die transitive Hülle von $\succ$) und

  (iii) $\leftrightarrow$ (die reflexive, transitive, symmetrische Hülle von $\succ$).

(b) Zeigen Sie, dass $\succ$ lokal konfluent sowie konfluent ist.

(c) Erweitern Sie die Relation $\succ$ um ein Tupel, so dass sie zwar lokal konfluent bleibt, aber nicht mehr konfluent ist.

Aufgabe 2

Seien $N := \mathbb{N} \setminus \{1,0\}$ und $N' := \mathbb{N} \setminus \{0\}$ Teilmengen der natürlichen Zahlen. Die Relation $\succ \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ ist definiert als

$$a \succ b \quad :\Longleftrightarrow \quad b \text{ teilt } a \text{ und } a \neq b \qquad (a,b \in \mathbb{N}).$$

Betrachten Sie nun die Reduktionssysteme $(N,\succ)$ und $(N',\succ)$:

(a)	Ist $(N,\succ)$ lokal konfluent?	Ist $(N',\succ)$ lokal konfluent?
(b)	Ist $(N,\succ)$ konfluent?	Ist $(N',\succ)$ konfluent?
(c)	Ist $(N,\succ)$ noethersch?	Ist $(N',\succ)$ noethersch?
(d)	Besitzt $(N,\succ)$ irreduzible Elemente? Wenn ja, welche?	Besitzt $(N,\succ)$ irreduzible Elemente? Wenn ja, welche?

Begründen Sie Ihre Antworten kurz.
Bemerkung: Mit $\succ$ ist jeweils die Einschränkung auf $N \times N$ bzw. $N' \times N'$ gemeint.

Aufgabe 3

Die Ackermann-Funktion ist eine rekursive Funktion, die für ihr außergewöhnlich schnelles Wachstum bekannt ist. Man könnte sie so programmieren:

```
nat A(nat x, nat y) {
   if (x==0) return y+1;
   else if (y==0) return A(x-1,1);
      else return A(x-1, A(x,y-1));
}
```

Finden Sie eine geeignete Ordnung auf $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, um mit Noetherscher Induktion zu zeigen, dass die Ackermann-Funktion für alle Eingaben terminiert.