

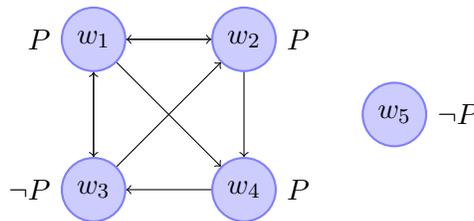
Formale Systeme, WS 2014/2015

Übungsblatt 12

Dieses Übungsblatt wird in der Übung am 06.02.2015 besprochen.

Aufgabe 1

Gegeben sei die modallogische Signatur, die nur das Atom P beinhaltet, sowie folgende Kripke-Struktur $\mathcal{K} = (W, R, I)$ über dieser Signatur:



(D.h., dass $W = \{w_1, w_2, w_3, w_4, w_5\}$,

$R = \{(w_1, w_2), (w_1, w_3), (w_1, w_4), (w_2, w_1), (w_2, w_4), (w_3, w_1), (w_3, w_2), (w_4, w_3)\}$,

und für die Interpretation I gilt: $I(P, w_1) = I(P, w_2) = I(P, w_4) = W$, $I(P, w_3) = I(P, w_5) = F$.)

- (a) Geben Sie für jede Welt $x \in W$ eine Formel ϕ_x an, so dass für jede Welt $y \in W, x \neq y$ gilt: $val_x(\phi_x) \neq val_y(\phi_x)$.
- (b) Die sogenannte *Extension* von ϕ (in der Struktur \mathcal{K}) ist $\llbracket \phi \rrbracket := \{w \in W \mid val_w(\phi) = W\}$.
 Bestimmen Sie für die Struktur \mathcal{K} : $\llbracket \Box P \rrbracket$, $\llbracket \Diamond \Box P \rrbracket$, $\llbracket \Diamond \Diamond P \rrbracket$ und $\llbracket \Box \Box P \rrbracket$.

Lösung zu Aufgabe 1

- (a) Die Unterscheidungsformeln sind (eine Möglichkeit):

$$\phi_{w_5} = \Box \mathbf{0}$$

$$\phi_{w_4} = P \wedge \Box \neg P$$

$$\phi_{w_3} = \neg P \wedge \Diamond P$$

$$\phi_{w_2} = \Box P \wedge P$$

$$\phi_{w_1} = \bigwedge_{i=w_2}^{w_5} \neg \phi_i$$

- (b) Die Extensionen in diesem Modell sind:

$$\llbracket \Box P \rrbracket = \{w_2, w_3, w_5\}$$

$$\llbracket \Diamond \Box P \rrbracket = \{w_1, w_3, w_4\}$$

$$\llbracket \Diamond \Diamond P \rrbracket = \{w_1, w_2, w_3, w_4\}$$

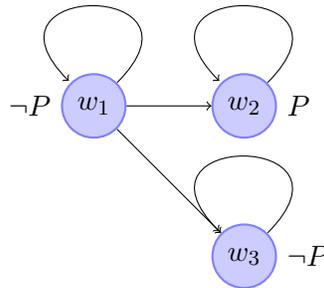
$$\llbracket \Box \Box P \rrbracket = \{w_4, w_5\}$$

Aufgabe 2

Wir betrachten die Klasse \mathbf{T} der Kripke-Strukturen $\mathcal{K} = (W, R, I)$ mit reflexiver Übergangsrelation R , und eine modallogische Signatur, die das Atom P enthält. Geben Sie eine konkrete \mathbf{T} -Struktur \mathcal{K} an, so daß $\mathcal{K} \models P \rightarrow \Box\Diamond P$, jedoch $\mathcal{K} \not\models \Diamond P \rightarrow \Box\Diamond P$.

Lösung zu Aufgabe 2

Sei \mathcal{K} der folgende reflexive Kripkerahmen:



Es gilt $\mathcal{K} \models P \rightarrow \Box\Diamond P$ wegen $w_2 \models \Box\Diamond P$, da w_2 genau sich selbst als Nachfolger hat. Gleichzeitig $w_1 \not\models \Diamond P \rightarrow \Box\Diamond P$, da $w_1 \models \Diamond P$ (wegen $w_1 \rightarrow w_2$), aber $w_1 \not\models \Box\Diamond P$ wegen $w_3 \not\models \Diamond P$.

Aufgabe 3

Überprüfen Sie, ob die folgenden Formeln mit den Atomen A und B in allen Kripke-Strukturen, bei denen der Kripke-Rahmen eine strikte Totalordnung¹ ist, allgemeingültig sind. Geben Sie für die nicht allgemeingültigen Formeln Gegenbeispiele an.

- (a) $\Box A \rightarrow \Diamond A$
- (b) $\Diamond A \rightarrow \Diamond \Diamond A$
- (c) $\Diamond A \wedge \Diamond B \rightarrow \Diamond((A \wedge \Diamond B) \vee (\Diamond A \wedge B) \vee (A \wedge B))$

Hinweis: Für alle $W \subseteq \mathbb{Z}$ ist beispielsweise $(W, <)$ eine strikte Totalordnung.

Lösung zu Aufgabe 3

(a) ist nicht allgemeingültig.

Gegenbeispiel: Sei $S = \{0\}$ und $R = \emptyset$, dann ist $0 \models \Box A$, aber nicht $0 \models \Diamond A$.

(b) ist nicht allgemeingültig.

In der unten stehenden Struktur gilt $0 \models \Diamond A$, aber nicht $0 \models \Diamond \Diamond A$.



(c) ist allgemeingültig.

Sei $t_0 \in S$ eine Kripkewelt.

Gelte $\mathcal{K}, t_0 \models \Diamond A \wedge \Diamond B$, dann gibt es zwei Welten $t_A > t_0$ und $t_B > t_0$, so dass $\mathcal{K}, t_A \models A$ und $\mathcal{K}, t_B \models B$. Nun werden wir in einer (erschöpfenden) Fallunterscheidung drei Fälle nebeneinander stellen:

$t_A < t_B$: Dann gilt $\mathcal{K}, t_A \models A \wedge \Diamond B$, also in t_0 auch $\mathcal{K}, t_0 \models \Diamond(A \wedge \Diamond B)$.

$t_A = t_B$: Dann gilt $\mathcal{K}, t_A \models A \wedge B$, also in t_0 auch $\mathcal{K}, t_0 \models \Diamond(A \wedge B)$.

$t_A > t_B$: Dann gilt $\mathcal{K}, t_B \models \Diamond A \wedge B$, also in t_0 auch $\mathcal{K}, t_0 \models \Diamond(\Diamond A \wedge B)$.

Da immer eine der drei Möglichkeiten erfüllt sein muss, ist insgesamt

$$\begin{aligned} \mathcal{K}, t_0 &\models \Diamond(A \wedge \Diamond B) \vee \Diamond(\Diamond A \wedge B) \vee \Diamond(A \wedge B) \\ \iff \mathcal{K}, t_0 &\models \Diamond((A \wedge \Diamond B) \vee (\Diamond A \wedge B) \vee (A \wedge B)) \end{aligned}$$

Diese Aussage gilt weil die Welten durch die strikte Totalordnung alle „in einer Kette“ liegen. Es gibt keine Verzweigungsmöglichkeiten, so dass auf einem Pfad A und einem anderen B gelten könnte. Die beiden Welten t_A und t_B müssen bezgl. R in Beziehung zu einander stehen.

Die Implikation gilt auch in der Rückrichtung, so daß wir insgesamt erhalten:

$$\begin{aligned} \mathcal{K}, t_0 &\models \Diamond((A \wedge \Diamond B) \vee (\Diamond A \wedge B) \vee (A \wedge B)). \\ \iff \mathcal{K}, t_0 &\models \Diamond(A \wedge \Diamond B) \vee \Diamond(\Diamond A \wedge B) \vee \Diamond(A \wedge B). \end{aligned}$$

Falls $\mathcal{K}, t_0 \models \Diamond(A \wedge B)$, so gilt $\mathcal{K}, t_0 \models \Diamond A \wedge \Diamond B$.

Falls $\mathcal{K}, t_0 \models \Diamond(A \wedge \Diamond B)$ ($\mathcal{K}, t_0 \models \Diamond(\Diamond A \wedge B)$ analog), so gilt wegen der Transitivität (d.h. $\Diamond \Diamond A \rightarrow \Diamond A$) auch $\mathcal{K}, t_0 \models \Diamond A \wedge \Diamond B$.

¹d.h., eine transitive Relation R , bei der zwischen je zwei Elementen a, b immer genau eine der Beziehungen $R(a, b)$, $a = b$ oder $R(b, a)$ besteht.

Aufgabe 4

Modallogische Formeln können auf prädikatenlogische Formeln abgebildet werden, indem man jeder modallogischen Variablen p ein einstelliges Prädikat $p(\cdot)$ zuordnet und außerdem die Zugänglichkeitsrelation der Kripkestruktur als zweistelliges Prädikat $r(\cdot, \cdot)$ darstellt.

Geben Sie eine rekursive Definition dieser Abbildung, die modallogische Formeln φ auf prädikatenlogische Formeln φ' abbildet.

Geben Sie auch an, wie jeder Kripkestruktur \mathcal{K} eine prädikatenlogische Interpretation $\mathcal{K}' = (D_{\mathcal{K}'}, I_{\mathcal{K}'})$ zuzuordnen ist, so dass – wie beabsichtigt – gilt:

$$\mathcal{K} \models \varphi \quad \text{gdw.} \quad \mathcal{K}' \models \varphi' .$$

Lösung zu Aufgabe 4

Zunächst die Transformation einer modallogischen Struktur $\mathcal{K} = (S, R, I)$ über der Signatur Σ in eine prädikatenlogische Struktur $\mathcal{K}' = (D_{\mathcal{K}'}, I_{\mathcal{K}'})$ über $\Sigma_{\mathcal{K}'}$.

$$\begin{aligned} D_{\mathcal{K}'} &= S \\ \Sigma_{\mathcal{K}'} &= (\emptyset, \Sigma \cup \{r\}, \alpha) \\ \alpha(p) &= 1 \text{ für } p \in \Sigma \\ \alpha(r) &= 2 \\ I_{\mathcal{K}'}(p) &= \{s \in S : I(p, s) = W\} \\ I_{\mathcal{K}'}(r) &= R \end{aligned}$$

Das PL-Universum entspricht der Menge der möglichen Welten der Kripkestruktur. Für eine modallogische Formel φ suchen wir daher nun eine PL-Formel $\tilde{\varphi}$, die eine freie Variable x besitzt. Die Belegung von x bestimmt die Welt, in der die Formel „ausgewertet“ werden soll. Dazu transformieren wir durch die folgende, rekursiv anzuwendende Abbildung:

Modallogik φ	Prädikatenlogik $\tilde{\varphi}$	
p	$p(x)$	AL-Atome werden zu Anwendungen von Prädikaten
$\psi \circ \chi$	$\tilde{\psi} \circ \tilde{\chi}$	AL-Verknüpfungen bleiben erhalten
$\Box\psi$	$\forall y(r(x, y) \rightarrow \tilde{\psi}[x \leftarrow y])$	\Box wird zum Allquantor, wobei die Variable y neu gewählt sein muss, also in $\tilde{\psi}$ nicht auftreten darf.
$\Diamond\psi$	$\exists y(r(x, y) \wedge \tilde{\psi}[x \leftarrow y])$	\Diamond wird zum Existenzquantor, wobei die Variable y neu gewählt sein muss, also in $\tilde{\psi}$ nicht auftreten darf.

Offensichtlich enthält jedes $\tilde{\varphi}$ genau eine freie Variable: x . Diese entspricht dem Zustand, in dem die Formel ausgewertet werden soll. Entsprechend bedeutet z.B. die Übersetzung des \Box -Operators, dass eine Formel in allen Zuständen y , für die $r(x, y)$ wahr ausgewertet wird, auch wahr ausgewertet werden muss.

Die Aussage $\mathcal{K}, s \models \varphi$ ist damit genau dann wahr, wenn die Aussage $\mathcal{K}', I_{\mathcal{K}'}, \beta_x^s \models \tilde{\varphi}$ wahr ist. Die Aussage ist in jeder Kripkewelt gültig ($\mathcal{K} \models \varphi$), wenn $\mathcal{K}', I_{\mathcal{K}'} \models \forall x \tilde{\varphi}$ wahr ist. Setze also $\varphi' := \forall x \tilde{\varphi}$.

Da umgekehrt aus jeder PL-Interpretation auch eine Kripkestruktur abgeleitet werden kann, gilt sogar die Aussage:

$$\varphi \text{ ist allgemeingültig in allen Kripkestrukturen gdw. } \varphi' \text{ ist prädikatenlogisch allgemeingültig.}$$