Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Theoretische Informatik
Prof. Dr. Bernhard Beckert
Thorsten Bormer, Dr. Vladimir Klebanov, Dr. Mattias Ulbrich

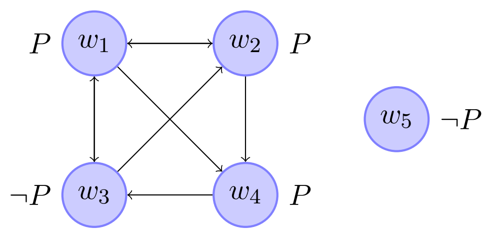
Formale Systeme, WS 2014/2015

Übungsblatt 12

Dieses Übungsblatt wird in der Übung am 06.02.2015 besprochen.

Aufgabe 1

Gegeben sei die modallogische Signatur, die nur das Atom P beinhaltet, sowie folgende Kripke-Struktur $\mathcal{K} = (W, R, I)$ über dieser Signatur:



(D.h., dass $W = \{w_1, w_2, w_3, w_4, w_5\}$,
$R = \{(w_1, w_2), (w_1, w_3), (w_1, w_4), (w_2, w_1), (w_2, w_4), (w_3, w_1), (w_3, w_2), (w_4, w_3)\}$,
und für die Interpretation I gilt: $I(P, w_1) = I(P, w_2) = I(P, w_4) = W$, $I(P, w_3) = I(P, w_5) = F$.)

(a) Geben Sie für jede Welt $x \in W$ eine Formel ϕ_x an, so dass für jede Welt $y \in W, x \neq y$ gilt: $val_x(\phi_x) \neq val_y(\phi_x)$.

(b) Die sogenannte *Extension* von ϕ (in der Struktur $\mathcal{K}$) ist $[\![\phi]\!] := \{w \in W \mid val_w(\phi) = W\}$.
Bestimmen Sie für die Struktur $\mathcal{K}$: $[\![\Box P]\!]$, $[\![\Diamond\Box P]\!]$, $[\![\Diamond\Diamond P]\!]$ und $[\![\Box\Box P]\!]$.

Aufgabe 2

Wir betrachten die Klasse $\mathbf{T}$ der Kripke-Strukturen $\mathcal{K} = (W, R, I)$ mit reflexiver Übergangsrelation R, und eine modallogische Signatur, die das Atom P enthält. Geben Sie eine konkrete $\mathbf{T}$-Struktur $\mathcal{K}$ an, so daß $\mathcal{K} \models P \to \Box\Diamond P$, jedoch $\mathcal{K} \not\models \Diamond P \to \Box\Diamond P$.

Aufgabe 3

Überprüfen Sie, ob die folgenden Formeln mit den Atomen A und B in allen Kripke-Strukturen, bei denen der Kripke-Rahmen eine strikte Totalordnung[1] ist, allgemeingültig sind. Geben Sie für die nicht allgemeingültigen Formeln Gegenbeispiele an.

(a) $\Box A \to \Diamond A$

(b) $\Diamond A \to \Diamond\Diamond A$

(c) $\Diamond A \wedge \Diamond B \to \Diamond((A \wedge \Diamond B) \vee (\Diamond A \wedge B) \vee (A \wedge B))$

Hinweis: Für alle $W \subseteq \mathbb{Z}$ ist beispielsweise $(W, <)$ eine strikte Totalordnung.

Aufgabe 4

Modallogische Formeln können auf prädikatenlogische Formeln abgebildet werden, indem man jeder modallogischen Variablen p ein einstelliges Prädikat $p(\cdot)$ zuordnet und außerdem die Zugänglichkeitsrelation der Kripkestruktur als zweistelliges Prädikat $r(\cdot, \cdot)$ darstellt.

Geben Sie eine rekursive Definition dieser Abbildung, die modallogische Formeln φ auf prädikatenlogische Formeln φ' abbildet.

Geben Sie auch an, wie jeder Kripkestruktur $\mathcal{K}$ eine prädikatenlogische Interpretation $\mathcal{K}' = (D_{\mathcal{K}'}, I_{\mathcal{K}'})$ zuzuordnen ist, so dass – wie beabsichtigt – gilt:

$$\mathcal{K} \models \varphi \qquad \text{gdw.} \qquad \mathcal{K}' \models \varphi' \ .$$

[1] d.h., eine transitive Relation R, bei der zwischen je zwei Elementen a, b immer genau eine der Beziehungen $R(a, b)$, $a = b$ oder $R(b, a)$ besteht.