

## Formale Systeme, WS 2014/2015

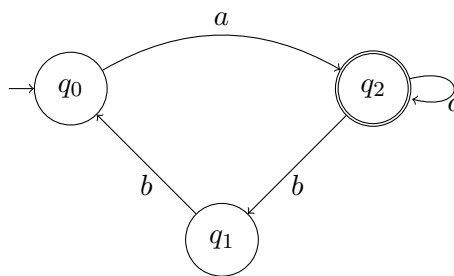
### Übungsblatt 13

Dieses Übungsblatt wird in der Übung am 06.02.2015 besprochen.

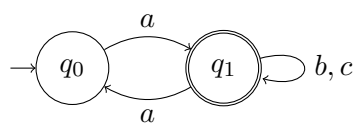
#### Aufgabe 1

Geben Sie für jeden der folgenden Büchi-Automaten jeweils die  $\omega$ -Sprache  $L^\omega$ , die von ihm akzeptiert wird, als  $\omega$ -regulären Ausdruck<sup>1</sup> an.

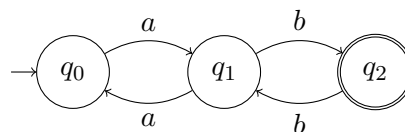
(a)



(b)



(c)



<sup>1</sup>Siehe Definitionen 10.36 und 10.37 im Skriptum.

## Lösung zu Aufgabe 1

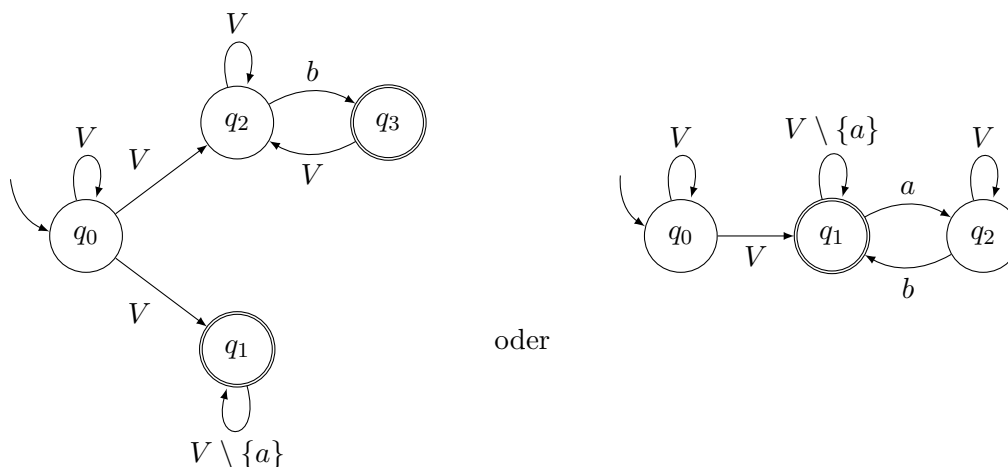
- (a)  $L^\omega = a(bba + c)^\omega$   
 (b)  $L^\omega = a(aa + b + c)^\omega$   
 (c)  $L^\omega = a((aa)^*bb)^\omega$

## Aufgabe 2

Gegeben sei ein endliches Alphabet  $V$ , das wenigstens die beiden Buchstaben  $a$  und  $b$  enthält. Geben Sie einen Büchi-Automaten  $\mathcal{B}$  an, so dass  $L^\omega(\mathcal{B}) = L_{a\omega \rightarrow b\omega}$ , mit

$$L_{a\omega \rightarrow b\omega} := \{v \in V^\omega \mid \text{wenn } a \text{ in } v \text{ unendlich oft vorkommt, dann kommt auch } b \text{ in } v \text{ unendlich oft vor}\}.$$

## Lösung zu Aufgabe 2



oder

Bei dem linken Automaten z.B. muss man sich an einem Punkt (indeterministisch) für einen der beiden "Pfade" entscheiden: In  $q_1$  werden alle  $\omega$ -Wörter, die ab einer Stelle kein  $a$  mehr enthalten (also insgesamt nur endlich viele  $a$ ), akzeptiert, während in dem von  $q_2$  und  $q_3$  aufgespannten Teil die Wörter akzeptiert werden, in denen  $b$  unendlich oft auftritt. Die Aussage „ $w$  enthält endlich viele  $a$  oder unendlich viele  $b$ “ ist äquivalent zu „Wenn  $w$  unendlich viele  $a$  enthält, dann auch unendlich viele  $b$ “.

## Aufgabe 3

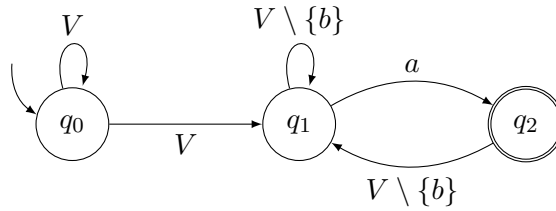
Geben Sie einen Büchi-Automaten  $\mathcal{C}$  an, so dass  $L^\omega(\mathcal{C}) = V^\omega \setminus L_{a\omega \rightarrow b\omega}$ , der also das Komplement von  $L_{a\omega \rightarrow b\omega}$  akzeptiert.

## Lösung zu Aufgabe 3

Die komplementäre Sprache lautet:

$$V^\omega \setminus L_{a\omega \rightarrow b\omega} = \{w \in V^\omega : w \text{ enthält unendlich viele } a, \text{ aber } b \text{ kommt nur endlich oft vor.}\}$$

Ein möglicher Büchi-Automat  $\mathcal{C}$  ist der folgende:



**Aufgabe 4 (Bonusaufgabe)**

Seien  $A_1, A_2$  endliche (nicht notwendigerweise deterministische) Automaten über dem Alphabet  $V$ . Zeigen Sie durch Angabe von Gegenbeispielen, dass folgende Aussagen im Allgemeinen nicht gelten:

- (a)  $L(A_1) = V^* \setminus L(A_2)$  impliziert  $L^\omega(A_1) = V^\omega \setminus L^\omega(A_2)$ .
- (b)  $L^\omega(A_1) = V^\omega \setminus L^\omega(A_2)$  impliziert  $L(A_1) = V^* \setminus L(A_2)$ .

Hinweis: Für jeden Automaten sind zwei Zustände ausreichend.

**Lösung zu Aufgabe 4**

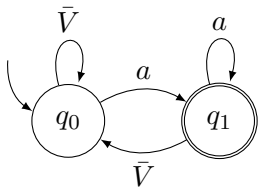
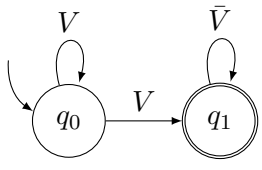
Definiere:  $\bar{V} = V \setminus \{a\}$

(a)

	Automat $A_1$	Automat $A_2$
Automaten		
Reguläre Sprache	$L_1 = V^*a$	$L_2 = (V^*\bar{V}) = V^* \setminus L_1$
$\omega$ -Sprache	$L_1^\omega = \{w \in V^\omega : a \text{ unendlich oft in } w\}$ $= (V^*a)^\omega$	$L_2^\omega = \{w \in V^\omega : w \text{ endet nicht mit } a^\omega\}$ $= V^\omega \setminus (V^*a^\omega)$

$L_1^\omega$  und  $L_2^\omega$  sind nicht zu einander komplementär: Das Wort  $w = abababab\dots$  liegt im Schnitt.

(b)

	Automat $A_1$	Automat $A_2$
Automaten		
Reguläre Sprache	$L_1 = V^*a$	$L_2 = V^*V\bar{V}^*$
$\omega$ -Sprache	$L_1^\omega = \{w \in V^\omega : a \text{ unendlich oft in } w\}$	$L_2^\omega = \{w \in V^\omega : a \text{ nur endlich oft in } w\}$ $= V^\omega \setminus L_1^\omega$

$L_1$  und  $L_2$  sind nicht zu einander komplementär.  $L_2$  ist eine etwas kompliziert zu formulierende Sprache, aber man sieht leicht ein, dass  $L_1 \neq V^* \setminus L_2$ , z.B. durch das Wort  $a$ , welches sowohl in  $L_1$  als auch in  $L_2$  liegt; oder durch das leere Wort  $\epsilon \in V^*$ , welches weder in  $L_1$  noch in  $L_2$  liegt.