

## Formale Systeme, WS 2014/2015

### Übungsblatt 14

Dieses Übungsblatt wird in der Übung am 13.02.2015 besprochen.

Im Folgenden wird der Operator  $\mathbf{V}$  verwendet, wie er in der Vorlesung definiert wurde. Dieser Operator wird bisweilen auch **Release-Operator** genannt, weil die Semantik von  $A \mathbf{V} B$  gerade ist, dass  $B$  gelten muss, bis  $A$  gilt, also  $A$  löst  $B$  (“ $A$  releases  $B$ ”).

#### Aufgabe 1

Überprüfen Sie, ob folgende LTL-Formeln in allen  $\omega$ -Strukturen gelten. Begründen Sie Ihre Antwort.

- (a)  $(A \vee B) \mathbf{U} C \leftrightarrow (A \mathbf{U} C) \vee (B \mathbf{U} C)$
- (b)  $A \mathbf{V} (B \wedge C) \rightarrow (A \mathbf{V} B) \wedge (A \mathbf{V} C)$
- (c)  $(A \mathbf{V} B) \wedge (A \mathbf{V} C) \rightarrow A \mathbf{V} (B \wedge C)$

#### Lösung zu Aufgabe 1

- (a) Diese Aussage gilt nicht in allen  $\omega$ -Strukturen.

Gegenbeispiel:

$$\xi(0) = \{A\}, \quad \xi(1) = \{B\}, \quad \xi(2) = \{C\}$$

Dann gilt:

$$\xi \models (A \vee B) \mathbf{U} C \text{ aber weder } \xi \models A \mathbf{U} C \text{ noch } \xi \models B \mathbf{U} C$$

- (b) + (c) gilt.

Sei  $\xi$  beliebige  $\omega$ -Struktur, dann gilt:

- $\xi \models A \mathbf{V} (B \wedge C)$  gdw. Für alle  $n \in \mathbb{N}$  gilt:  $\xi_n \models B \wedge C$  oder es existiert ein  $k \in \mathbb{N}, k < n$  mit  $\xi_k \models A$ .
- gdw. Für alle  $n \in \mathbb{N}$  gilt: ( $\xi_n \models B$  und  $\xi_n \models C$ ) oder es existiert ein  $k \in \mathbb{N}, k < n$  mit  $\xi_k \models A$ .
- gdw. Für alle  $n \in \mathbb{N}$  gilt: ( $\xi \models B$  oder es existiert ein  $k \in \mathbb{N}, k < n$  mit  $\xi_k \models A$ ) und ( $\xi \models C$  oder es existiert ein  $k \in \mathbb{N}, k < n$  mit  $\xi_k \models A$ ).
- gdw. (Für alle  $n \in \mathbb{N}$  gilt:  $\xi \models B$  oder es existiert ein  $k \in \mathbb{N}, k < n$  mit  $\xi_k \models A$ ), und (für alle  $n \in \mathbb{N}$  gilt:  $\xi \models C$  oder es existiert ein  $k \in \mathbb{N}, k < n$  mit  $\xi_k \models A$ ).
- gdw.  $\xi \models (A \mathbf{V} B) \wedge (A \mathbf{V} C)$

## Aufgabe 2

Gegeben sei die Signatur  $\Sigma = \{p, q\}$ . Geben Sie für die folgenden LTL-Formeln  $\varphi$  je einen Büchi-Automaten  $\mathcal{A}_\varphi$  über dem Alphabet  $V = \mathbb{P}(\Sigma)$  an<sup>1</sup>, so dass  $L^\omega(\mathcal{A}_\varphi) = \{\xi \in V^\omega : \xi \models \varphi\}$  gilt. Sie können die Mengenschreibweise aus Abb. 1 verwenden.

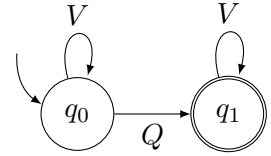
- (a)  $\varphi_a = \diamond(p \mathbf{U} q)$
- (b)  $\varphi_b = \square(p \mathbf{V} q)$
- (c)  $\varphi_c = \diamond\square p \rightarrow \diamond\square q$

$$\begin{aligned}
 V &= \{\emptyset, \{p\}, \{q\}, \{p, q\}\} \\
 P &= \{\{p\}, \{p, q\}\} \\
 \overline{P} &= \{\emptyset, \{q\}\} \\
 Q &= \{\{q\}, \{p, q\}\} \\
 \overline{Q} &= \{\emptyset, \{p\}\} \\
 PQ &= \{\{p, q\}\}
 \end{aligned}$$

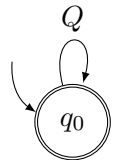
Abbildung 1: Mengenschreibweise

## Lösung zu Aufgabe 2

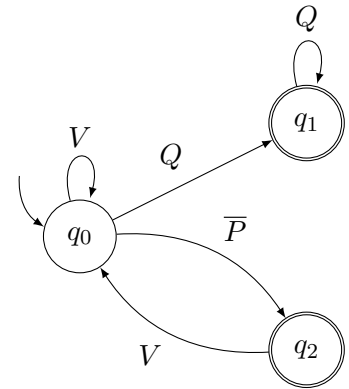
- (a) Beobachtung:  $\diamond(p \mathbf{U} q)$  ist äquivalent zu  $\diamond q$



- (b) Beobachtung:  $\square(p \mathbf{V} q)$  ist äquivalent zu  $\square q$



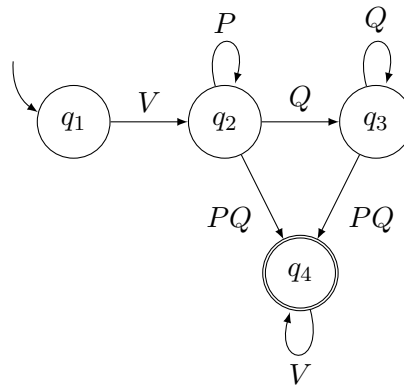
- (c) Beobachtung:  $\varphi_c$  ist erfüllt, wenn  $q$  ab einem Zeitpunkt immer gilt, oder wenn  $\neg p$  unendlich oft gilt.



<sup>1</sup> $\mathbb{P}(S)$  steht hier für die Potenzmenge von  $S$ .

### Aufgabe 3

Seien  $\Sigma$  und  $V$  wie in Aufgabe 2 und der folgende Automat  $\mathcal{B}$  gegeben. Die Mengenschreibweise ist in Abb. 1 definiert. Geben Sie eine LTL-Formel  $\psi$  an, so dass  $L^\omega(\mathcal{B}) = \{\xi \in V^\omega : \xi \models \psi\}$  gilt.



### Lösung zu Aufgabe 3

$$\psi = \mathbf{X}(p \mathbf{U} (q \mathbf{U} (p \wedge q)))$$

### Aufgabe 4

Seien  $\Sigma$  und  $V$  wie in Aufgabe 2, und die Mengenschreibweise wie in Abb. 1.

Eine omega-Struktur heißt **schwach fair**, falls gilt: Wenn von einem Zeitpunkt an  $p$  immer gilt, dann wird  $q$  unendlich oft wahr.

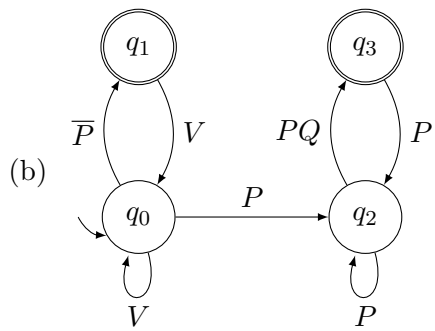
- (a) Geben Sie eine LTL-Formel  $\chi_1$  an, so dass  $\chi_1$  in einer omega-Struktur  $K = (\mathbb{N}, <, \xi)$  genau dann wahr ist, wenn  $K$  schwach fair ist.
- (b) Geben Sie einen Büchiauxtomaten  $\mathcal{A}_{\chi_1}$  über  $V$  an, so dass  $L^\omega(\mathcal{A}_{\chi_1}) = \{\xi \in V^\omega : \xi \models \chi_1\}$  gilt.

Eine omega-Struktur heißt **(stark) fair**, falls gilt: Wenn von einem Zeitpunkt an  $p$  unendlich oft gilt, dann wird  $q$  unendlich oft wahr.

- (c) Geben Sie eine LTL-Formel  $\chi_2$  an, so dass  $\chi_2$  in einer omega-Struktur  $K = (\mathbb{N}, <, \xi)$  genau dann wahr ist, wenn  $K$  fair ist.
- (d) Geben Sie einen Büchiauxtomaten  $\mathcal{A}_{\chi_2}$  über  $V$  an, so dass  $L^\omega(\mathcal{A}_{\chi_2}) = \{\xi \in V^\omega : \xi \models \chi_2\}$  gilt.

### Lösung zu Aufgabe 4

(a)  $\chi_1 = \diamond \square p \rightarrow \square \diamond q$



(c)  $\chi_2 = \square \diamond p \rightarrow \square \diamond q$

