

## Formale Systeme, WS 2014/2015

### Übungsblatt 2

Dieses Übungsblatt wird in der Übung am 14.11.2014 besprochen.

#### Aufgabe 1

Für  $n \in \mathbb{N}$  sei die Formel

$$A_n = P_1 \leftrightarrow P_2 \leftrightarrow P_3 \leftrightarrow \dots \leftrightarrow P_{n-1} \leftrightarrow P_n$$

gegeben. Sei  $A_n^{\text{knf}}$  eine zu  $A_n$  erfüllbarkeitsäquivalente Formel in kurzer KNF.

- Geben Sie  $A_4^{\text{knf}}$  an.
- Wie viele Disjunktionen enthält  $A_n^{\text{knf}}$ ?

#### Lösung zu Aufgabe 1

- Die Anwendung des beschriebenen Verfahrens auf  $A_4$  ergibt folgendes (modulo Assoziativität):

$$A_4 = \underbrace{P_1 \leftrightarrow P_2}_{Q_1} \leftrightarrow P_3 \leftrightarrow P_4$$

$$\underbrace{\hspace{10em}}_{Q_2}$$

Dies führt zu folgenden Äquivalenzen:

$$Q_1 \leftrightarrow P_1 \leftrightarrow P_2$$

$$Q_2 \leftrightarrow Q_1 \leftrightarrow P_3$$

$$Q_2 \leftrightarrow P_4$$

$Q_i \leftrightarrow (Q_{i-1} \leftrightarrow P_{i+1})$  (mit  $Q_0 = P_1$ ) lässt sich wie folgt als KNF mit 4 Klausel mit je zwei Disjunktionen darstellen. Zunächst bemerken wir das jede Äquivalenz  $A \leftrightarrow B$  logisch äquivalent ist zu  $(A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)$  und zu  $(A \vee \neg B) \wedge (\neg A \vee B)$ . Von diesen beiden Äquivalenzen wird in der folgenden äquivalenten Umformungskette Gebrauch gemacht.

$$\begin{aligned}
 & Q_i \leftrightarrow (Q_{i-1} \leftrightarrow P_{i+1}) \\
 \equiv & Q_i \vee \neg(Q_{i-1} \leftrightarrow P_{i+1}) && \wedge \quad \neg Q_i \vee (Q_{i-1} \leftrightarrow P_{i+1}) \\
 \equiv & Q_i \vee \neg((Q_{i-1} \wedge P_{i+1}) \vee (\neg Q_{i-1} \wedge \neg P_{i+1})) && \wedge \quad \neg Q_i \vee ((\neg Q_{i-1} \vee P_{i+1}) \wedge (Q_{i-1} \vee \neg P_{i+1})) \\
 \equiv & Q_i \vee (\neg(Q_{i-1} \wedge P_{i+1}) \wedge \neg(\neg Q_{i-1} \wedge \neg P_{i+1})) && \wedge \quad \neg Q_i \vee ((\neg Q_{i-1} \vee P_{i+1}) \wedge (Q_{i-1} \vee \neg P_{i+1})) \\
 \equiv & Q_i \vee ((\neg Q_{i-1} \vee \neg P_{i+1}) \wedge (Q_{i-1} \vee P_{i+1})) && \wedge \quad (\neg Q_i \vee \neg Q_{i-1} \vee P_{i+1}) \wedge (\neg Q_i \vee Q_{i-1} \vee \neg P_{i+1}) \\
 \equiv & (Q_i \vee \neg Q_{i-1} \vee \neg P_{i+1}) \wedge (Q_i \vee Q_{i-1} \vee P_{i+1}) && \wedge \quad (\neg Q_i \vee \neg Q_{i-1} \vee P_{i+1}) \wedge (\neg Q_i \vee Q_{i-1} \vee \neg P_{i+1})
 \end{aligned}$$

Insgesamt ergibt sich also:

$$\begin{aligned}
 A_4 \equiv & (Q_1 \vee \neg P_1 \vee \neg P_2) \wedge (Q_1 \vee P_1 \vee P_2) && \wedge \quad (\neg Q_1 \vee \neg P_1 \vee P_2) \wedge (\neg Q_1 \vee P_1 \vee \neg P_2) \\
 & \wedge (Q_2 \vee \neg Q_1 \vee \neg P_3) \wedge (Q_2 \vee Q_1 \vee P_3) && \wedge \quad (\neg Q_2 \vee \neg Q_1 \vee P_3) \wedge (\neg Q_2 \vee Q_1 \vee \neg P_3) \\
 & \wedge (Q_2 \vee \neg P_4) \wedge (\neg Q_2 \vee P_4)
 \end{aligned}$$

(b) Die Anwendung des beschriebenen Verfahrens auf  $A_n$  ergibt folgendes (modulo Assoziativität):

$$A_n = \underbrace{P_1 \leftrightarrow P_2}_{Q_1} \leftrightarrow P_3 \leftrightarrow \dots \leftrightarrow P_{n-1} \leftrightarrow P_n$$

$$\underbrace{\underbrace{\underbrace{P_1 \leftrightarrow P_2 \leftrightarrow P_3 \leftrightarrow \dots \leftrightarrow P_{n-1} \leftrightarrow P_n}_{Q_2}}_{Q_3} \dots}_{Q_{n-2}}$$

Dies führt zu folgenden Äquivalenzen:

$$\begin{aligned} Q_1 &\leftrightarrow P_1 \leftrightarrow P_2 \\ Q_2 &\leftrightarrow Q_1 \leftrightarrow P_3 \\ Q_3 &\leftrightarrow Q_2 \leftrightarrow P_4 \\ &\vdots \\ Q_{n-2} &\leftrightarrow Q_{n-3} \leftrightarrow P_{n-1} \\ &Q_{n-2} \leftrightarrow P_n \end{aligned}$$

Für die ersten  $n - 2$  Äquivalenzen lässt sich die KNF mit je 4 Disjunktionen bilden (siehe oben), für  $Q_{n-2} \leftrightarrow P_n$  mit 2 Disjunktionen. Insgesamt sind das also

$$(n - 2) \cdot 4 + 2 = 4n - 6$$

Klauseln, nur  $O(n)$  viele.

## Aufgabe 2

Gegeben sei die Formel

$$F = (A \wedge (B \vee \neg C)) \rightarrow D$$

und die Ordnung  $A < B < C < D$  auf den aussagenlogischen Variablen.

Erstellen Sie einen reduzierten Shannongraphen (BDD) für  $F$ .

## Lösung zu Aufgabe 2

Siehe Abbildung 1.

Wenn man den Graphen nach Algorithmus erstellt, erhält man zunächst 3 Knoten mit Beschriftung  $D$ , deren Untergraphen aber isomorph sind und der Graph daher auf einen mit einem solchen Knoten reduziert werden kann und muss.

## Aufgabe 3

Geben Sie den reduzierten Shannon Graphen (BDD) an, der äquivalent ist zu der  $sh$ -Formel

$$sh(P_3, P_2, P_1)$$

und die Ordnung  $P_1 < P_2 < P_3$  auf den aussagenlogischen Variablen respektiert.

## Lösung zu Aufgabe 3

Abbildung 2 zeigt den gesuchten BDD. Wie man sieht ist die Reihenfolge der Variablen bei BDDs durchaus von Bedeutung!

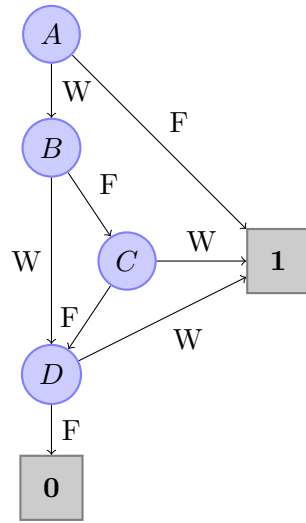


Abbildung 1: Shannon-Graph zu Aufgabe 2

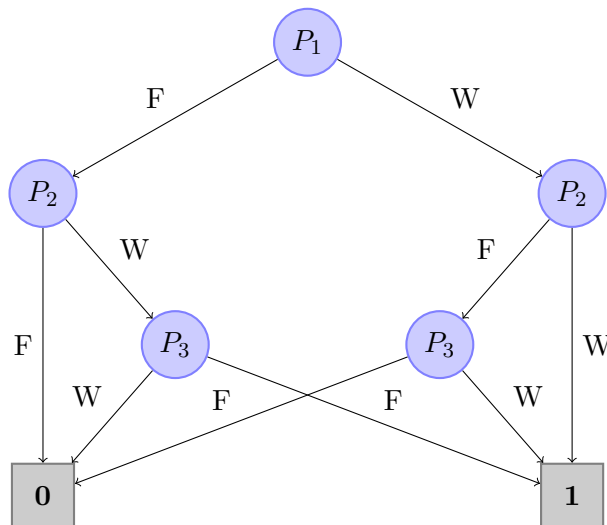


Abbildung 2: Shannon-Graph zu Aufgabe 3

### Aufgabe 4

Gegeben sei für  $n \in \mathbb{N}$  die **Paritätsfunktion**<sup>1</sup>  $f_n : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$  durch

$$f_n(P_1, P_2, \dots, P_n) = \begin{cases} 1 & \text{falls die Summe } P_1 + \dots + P_n \text{ ungerade ist} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Geben Sie einen reduzierten Shannongraphen für die Funktion  $f_4$  an.

### Lösung zu Aufgabe 4

Geht man streng nach Schema vor, so beginnt man mit einem vollständigen Entscheidungsbaum (s. Abb. 1) und wendet darauf das Reduktionsverfahren aus der Vorlesung an. Zunächst wird man feststellen, dass die  $P_4$ -Unterbäume wegen Isomorphie auf zwei reduziert werden können. Im entstehenden Graphen sind je zwei bei einem  $P_3$ -Knoten beginnende Untergraphen isomorph, die beiden  $P_2$  bleiben erhalten. Insgesamt ergibt sich Abbildung 2.

Man kann auch direkt auf diese Darstellung kommen, wenn man von der Aufgabenstellung selbst ausgeht. Es spielt bei der Auswertung des Graphen keine Rolle in welcher Nullen und Einsen aufeinander folgen, einzig die bisherige Parität der Eingabe ist relevant. Z.B. sollten wir uns beim Auswerten von  $P_4$  im selben Knoten befinden, egal, ob  $(P_1, P_2, P_3) = (1, 0, 0)$  oder  $(0, 1, 0)$  oder  $(1, 1, 1)$  war. Einzig die bisherige Parität und die Belegung von  $P_4$  sind entscheidend für die weitere Auswertung. Da es nur 2 Paritätszustände gibt, ist klar, dass es für  $i \geq 2$  genau 2 Knoten mit der Beschriftung  $P_i$  geben muss. Eine 1 führt dabei zur jeweils anderen „Paritäts-Gruppe“, eine 0 erhält die Parität.

*Weiterführende Frage: Wie sieht der reduzierte Shannongraph für die allgemeine Funktion  $f_n$  aus?*

Das oben gessagte gilt auch für allgemeines  $n$ : Das Verhalten hängt nicht von der Belegung der vorangegangenen Variablen ab, sondern nur von deren Parität, damit wird es weiter für jede Variable zwei Knoten geben, für jede Parität einen.

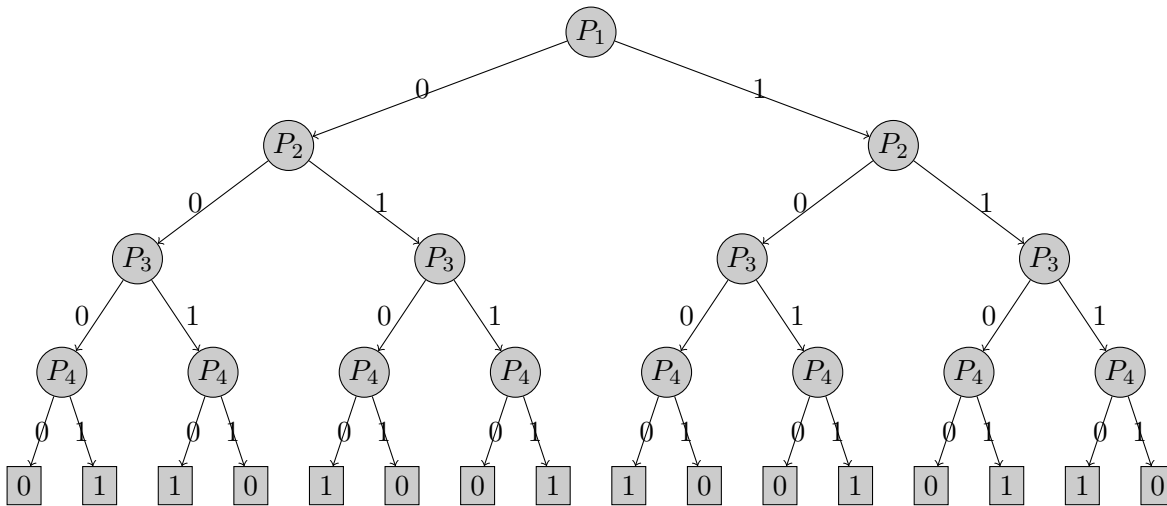


Abbildung 3: Ausgangsbaum für Aufgabe 6

<sup>1</sup>Streng genommen müsste diese Funktion auf der Menge  $\{F, W\}$  operieren, aber die Formulierbarkeit als Summe legt diese etwas andere Schreibweise nahe.

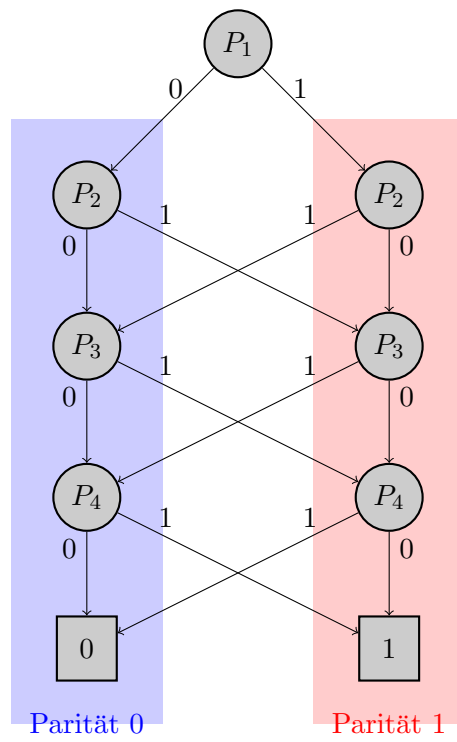


Abbildung 4: Shannongraph zu Aufgabe 4