Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Theoretische Informatik
Prof. Dr. Bernhard Beckert
Thorsten Bormer, Dr. Vladimir Klebanov, Dr. Mattias Ulbrich

Formale Systeme, WS 2014/2015

Übungsblatt 4

Dieses Übungsblatt wird in der Übung am 21.11.2014 besprochen.

Aufgabe 1

Tante Agathe wurde in ihrem Haus tot aufgefunden. Nach bisherigen Ermittlungen gilt Folgendes als sicher:

1. Im Haus lebten nur Agathe, ihr Butler und Onkel Charles.
2. Agathe wurde von einem Hausbewohner getötet.
3. Wer jemanden tötet, hasst sein Opfer.
4. Charles hasst niemanden, den Agathe hasste.
5. Der Täter ist niemals reicher als das Opfer.
6. Der Butler hasst alle, die nicht reicher als Agathe sind oder die Agathe hasste.
7. Kein Bewohner des Hauses hasst(e) alle Hausbewohner.

Gegeben ist ferner die prädikatenlogische Signatur $\Sigma_{Agathe} = (F, P, \alpha)$ mit

- $P = \{\text{kills}, \text{hates}, \text{richer}\}$
- $F = \{a, b, c\}$
- $\alpha(a) = \alpha(b) = \alpha(c) = 0, \qquad \alpha(\text{kills}) = \alpha(\text{hates}) = \alpha(\text{richer}) = 2$

Formalisieren Sie die Aussagen 1-7 in Prädikatenlogik mit dem Vokabular aus Σ_{Agathe}.

Lösung zu Aufgabe 1

1. $\forall x(x \doteq a \vee x \doteq b \vee x \doteq c)$
2. $\exists x(\text{kills}(x, a))$
   eigentlich gehört aber die Aussage 1. (Stichwort Hausbewohner) noch mit in die Kodierung, so dass die (in Kombination mit (1) äquivalente) Formel $\exists x(\text{kills}(x, a) \wedge (x \doteq a \vee x \doteq b \vee x \doteq c) \equiv \text{kills}(a, a) \vee \text{kills}(b, a) \vee \text{kills}(c, a)$ noch exakter formalisiert.
3. $\forall x \forall y(\text{kills}(x, y) \to \text{hates}(x, y))$
4. $\forall x(\text{hates}(a, x) \to \neg\text{hates}(c, x))$
5. $\forall x \forall y(\text{kills}(x, y) \to \neg\text{richer}(x, y))$
6. $\forall x((\neg\text{richer}(x, a) \vee \text{hates}(a, x)) \to \text{hates}(b, x))$
7. $\neg\exists x \forall y(\text{hates}(x, y))$

Aufgabe 2

Berechnen Sie für die Substitutionen θ, σ jeweils die Komposition $\sigma \circ \theta$.

(a) $\theta = \{x/a,\ y/x\}$, $\quad \sigma = \{v/f(u),\ u/z\}$

(b) $\theta = \{v/h(x,\ y),\ w/b,\ s/y\}$, $\quad \sigma = \{x/d,\ y/d,\ r/f(v)\}$

(c) $\theta = \{u/g(y,\ x),\ v/y,\ w/y\}$, $\quad \sigma = \{u/d,\ x/b,\ y/f(v)\}$

(d) $\theta = \{x/y,\ y/v\}$, $\quad \sigma = \{x/a,\ y/b,\ v/u\}$

Lösung zu Aufgabe 2

(a) $\sigma \circ \theta = \{x/a,\ y/x,\ v/f(u),\ u/z\}$

(b) $\sigma \circ \theta = \{v/h(d,\ d),\ w/b,\ s/d,\ x/d,\ y/d,\ r/f(v)\}$

(c) $\sigma \circ \theta = \{u/g(f(v),\ b),\ v/f(v),\ w/f(v),\ x/b,\ y/f(v)\}$

(d) $\sigma \circ \theta = \{x/b,\ y/u,\ v/u\}$

Aufgabe 3

(a) Betrachten Sie jeweils die folgenden Substitutionen σ und Formeln F. Falls σ für F kollisionsfrei ist, geben Sie $\sigma(F)$ an; andernfalls geben Sie an, wo eine Kollision auftritt.

(i) $\sigma = \{x/c,\ y/f(c, g(x))\}$ $\quad F = \forall x(p(g(x), f(x,y)) \vee q(x))$

(ii) $\sigma = \{x/f(g(x), c)\}$ $\quad F = \exists y(p(x,y) \vee \exists z \forall x(f(z,c) \doteq f(c,x)))$

(iii) $\sigma = \{y/g(x),\ z/g(y)\}$ $\quad F = p(x,y) \rightarrow \forall x(q(f(x,z)) \vee \exists y(q(f(x,y))))$

(b) Betrachten Sie jeweils die folgenden Formeln F und G. Geben Sie einen allgemeinsten Unifikator μ sowie das Ergebnis $\mu(F) = \mu(G)$ der Unifikation an, falls sie unifizierbar sind.

(Hierbei sind a, b Konstanten, f, g, h Funktionssymbole und v, x, y, z Variablen.)

(i) $F = f(x,\ z,\ z)$ $\quad G = f(g(a,\ y),\ h(v),\ h(y))$

(ii) $F = f(g(x,\ z),\ z,\ h(b,\ x))$ $\quad G = f(g(a,\ y),\ h(v,\ a),\ y)$

(iii) $F = g(x,\ y)$ $\quad G = g(f(y),\ f(x))$

(iv) $F = f(g(y),\ h(y,\ g(y)))$ $\quad G = f(z,\ h(g(x),\ g(g(x))))$

Lösung zu Aufgabe 3

(a) (i) Nicht kollisionsfrei, da
- x kommt in $\sigma(y)$ vor.
- y kommt im Wirkungsbereich des Quantors $\forall x$ vor.

(ii) Kollisionsfrei, das zweite Auftreten von x (dort gebundene Variable!) wird nicht ersetzt.

$$\sigma(F) = \exists y(p(y, f(g(x), c)) \vee \forall x \exists z(f(z, c) \doteq f(c, x)))$$

(iii) Kollisionsfrei (das zweite Vorkommen von y wird nicht ersetzt)

$$\sigma(F) = p(x, g(x)) \rightarrow \forall x(q(f(x, g(y))) \vee \exists y(q(f(x, y))))$$

(b) (i) unifizierbar. Robinson ergibt:

$\mu_0 = id$	$\mu_0(F) = f(\boxed{x}, z, z)$	$\mu_0(G) = f(\boxed{g(a, y)}, h(v), h(y))$
$\mu_1 = \{x/g(a, y)\}$	$\mu_1(F) = f(g(a, y), \boxed{z}, z)$	$\mu_1(G) = f(g(a, y), \boxed{h(v)}, h(y))$
$\mu_2 = \{x/g(a, y), z/h(v)\}$	$\mu_2(F) = f(g(a, y), h(v), h(\boxed{v}))$	$\mu_2(G) = f(g(a, y), h(v), h(\boxed{y}))$
$\mu_3 = \{x/g(a, y), z/h(y), v/y\}$	$\mu_3(F) = \mu_3(G) = f(g(a, y), h(y), h(y))$	

Man muss beachten, dass man weitere Ersetzungen nicht einfach zur Menge hinzunehmen kann, sondern auch auf die darin enthaltenen Terme anwenden muss.
Beispielsweise: $\mu_3 = \{x/g(a, y), z/h(\boldsymbol{v})\} \circ \{v/\boldsymbol{y}\} = \{x/g(a, y), z/h(\boldsymbol{y}), v/y\}$

(ii) unifizierbar. Robinson ergibt:

$\mu_0 = id$	$\mu_0(F) = f(g(\boxed{x}, z), z, h(b, x))$ $\mu_0(G) = f(g(\boxed{a}, y), h(v, a), y)$
$\mu_1 = \{x/a\}$	$\mu_1(F) = f(g(a, \boxed{z}), z, h(b, a))$ $\mu_1(G) = f(g(a, \boxed{y}), h(v, a), y)$
$\mu_2 = \{x/a, z/y\}$	$\mu_2(F) = f(g(a, y), \boxed{y}, h(b, a))$ $\mu_2(G) = f(g(a, y), \boxed{h(v, a)}, y)$
$\mu_3 = \{x/a, z/h(v, a), y/h(v, a)\}$	$\mu_3(F) = f(g(a, h(v, a)), h(v, a), h(\boxed{b}, a))$ $\mu_3(G) = f(g(a, h(v, a)), h(v, a), h(\boxed{v}, a))$
$\mu_4 = \{x/a, z/h(b, a), y/h(b, a), v/b\}$	$\mu_4(F) = \mu_4(G) = f(g(a, h(b, a)), h(b, a), h(b, a))$

(iii) Im ersten Schritt des Robinsonalgorithmus erhält man:

$$\begin{aligned} \mu_1 &= \{x/f(y)\} \\ \mu_1(F) &= g(f(y), y) \\ \mu_1(G) &= g(f(y), f(f(y))) \end{aligned}$$

Nun aber muss der Algorithmus abbrechen, weil $D(\{\mu_1(F), \mu_1(G)\}) = \{y, f(f(y))\}$ und die sind nicht unifizierbar, weil y eine Variable ist und in $f(f(y))$ auftritt.

(iv) unifizierbar. Der Robinsonalgorithmus mit Zwischenergebnissen:

$\mu_0 = id$	$\mu_0(F) = f(\boxed{g(y)}, h(y, g(y)))$	$\mu_0(G) = f(\boxed{z}, h(g(x), g(g(x))))$
$\mu_1 = \{z/g(y)\}$	$\mu_1(F) = f(g(y), h(\boxed{y}, g(y)))$	$\mu_1(G) = f(g(y), h(\boxed{g(x)}, g(g(x))))$
$\mu_2 = \{z/g(g(x)), y/g(x)\}$	$\mu_2(F) = \mu_2(G) = f(g(g(x)), h(g(x), g(g(x))))$	

Aufgabe 4

Eine Substitution θ ist allgemeiner als eine Substitution σ, geschrieben $\theta \geqslant \sigma$, wenn es eine Substitution τ gibt, so daß $\tau \circ \theta = \sigma$.

(a) Es seien die folgenden Substitutionen gegeben:

$$\mu_1 = \{x/y,\ r/y,\ u/y,\ v/f(z)\}$$
$$\mu_2 = \{r/x,\ y/x,\ u/x,\ v/f(x),\ z/x\}$$
$$\mu_3 = \{x/a,\ y/a,\ z/b,\ u/a,\ v/f(b),\ r/a\}$$

Prüfen Sie für jedes mögliche Paar (μ_i, μ_j), ob $\mu_i \geqslant \mu_j$, und geben Sie ggf. die entsprechende Substitution τ an.

(b) Zeigen Sie folgende Eigenschaften von $\geqslant$:

(i) Reflexivität: $\theta \geqslant \theta$ für alle θ.

(ii) Transitivität: Falls $\theta \geqslant \sigma$ und $\sigma \geqslant \mu$, dann auch $\theta \geqslant \mu$ für alle θ, σ, μ.

(iii) Keine Antisymmetrie: Aus $\theta \geqslant \sigma$ und $\sigma \geqslant \theta$ folgt nicht $\theta = \sigma$ für alle θ, σ.

Sie dürfen dabei die Assoziativität der Substitutionskomposition $\circ$ benutzen.

Lösung zu Aufgabe 4

(a) Es ist klar, daß für $i = 1, 2, 3$ gilt $\mu_i \geqslant \mu_i$ (siehe auch nächste Teilaufgabe). Für alle anderen Paare:

- $\mu_1 \geqslant \mu_2$ mit Substitution $\{y/x, z/x\}$
- $\mu_1 \geqslant \mu_3$ mit Substitution $\{y/a, z/b\}$
- $\mu_2 \not\geqslant \mu_3$, da die Substitution x/a und x/b gleichzeitig substituieren müßte
- $\mu_2 \not\geqslant \mu_1$, da die Substitution x/y und x/z gleichzeitig substituieren müßte
- $\mu_3 \not\geqslant \mu_1$, da die Substitution x/a und x/y gleichzeitig substituieren müßte
- $\mu_3 \not\geqslant \mu_2$, da die Substitution r/a und r/x gleichzeitig substituieren müßte

(b) (i) Reflexivität: Es ist klar, daß $id \circ \theta = \theta$, also $\theta \geqslant \theta$ für alle θ.

(ii) Transitivität: $\theta \geqslant \sigma$ und $\sigma \geqslant \mu$ bedeutet die Existenz von σ_1, σ_2 so, daß $\sigma_1 \circ \theta = \sigma$ und $\sigma_2 \circ \sigma = \mu$. Nun gilt $(\sigma_2 \circ \sigma_1) \circ \theta = \sigma_2 \circ (\sigma_1 \circ \theta) = \sigma_2 \circ \sigma = \mu$. Die erste Gleichheit ergibt sich aus der Assoziativität, die anderen beiden aus der o.g. Existenzaussage. Damit haben wir bewiesen, daß eine Substitution existiert (nämlich $\sigma_2 \circ \sigma_1$), mit der $\theta \geqslant \mu$ für alle θ, σ, μ.

(iii) Keine Antisymmetrie: Sei $\theta = \{x/y\}$ und $\sigma = \{y/x\}$, offensichtlich $\theta \neq \sigma$. Allerdings gilt $\sigma \circ \theta = \sigma$ und damit $\theta \geqslant \sigma$. Analog gilt $\sigma \geqslant \theta$. Gegenbeispiel.