Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Theoretische Informatik
Prof. Dr. Bernhard Beckert
Thorsten Bormer, Dr. Vladimir Klebanov, Dr. Mattias Ulbrich

Formale Systeme, WS 2014/2015

Übungsblatt 4

Dieses Übungsblatt wird in der Übung am 21.11.2014 besprochen.

Aufgabe 1

Tante Agathe wurde in ihrem Haus tot aufgefunden. Nach bisherigen Ermittlungen gilt Folgendes als sicher:

1. Im Haus lebten nur Agathe, ihr Butler und Onkel Charles.
2. Agathe wurde von einem Hausbewohner getötet.
3. Wer jemanden tötet, hasst sein Opfer.
4. Charles hasst niemanden, den Agathe hasste.
5. Der Täter ist niemals reicher als das Opfer.
6. Der Butler hasst alle, die nicht reicher als Agathe sind oder die Agathe hasste.
7. Kein Bewohner des Hauses hasst(e) alle Hausbewohner.

Gegeben ist ferner die prädikatenlogische Signatur $\Sigma_{Agathe} = (F, P, \alpha)$ mit

- $P = \{\text{kills}, \text{hates}, \text{richer}\}$
- $F = \{a, b, c\}$
- $\alpha(a) = \alpha(b) = \alpha(c) = 0, \qquad \alpha(\text{kills}) = \alpha(\text{hates}) = \alpha(\text{richer}) = 2$

Formalisieren Sie die Aussagen 1-7 in Prädikatenlogik mit dem Vokabular aus Σ_{Agathe}.

Aufgabe 2

Berechnen Sie für die Substitutionen θ, σ jeweils die Komposition $\sigma \circ \theta$.

(a) $\theta = \{x/a,\ y/x\}$, $\quad \sigma = \{v/f(u),\ u/z\}$

(b) $\theta = \{v/h(x,\ y),\ w/b,\ s/y\}$, $\quad \sigma = \{x/d,\ y/d,\ r/f(v)\}$

(c) $\theta = \{u/g(y,\ x),\ v/y,\ w/y\}$, $\quad \sigma = \{u/d,\ x/b,\ y/f(v)\}$

(d) $\theta = \{x/y,\ y/v\}$, $\quad \sigma = \{x/a,\ y/b,\ v/u\}$

Aufgabe 3

(a) Betrachten Sie jeweils die folgenden Substitutionen σ und Formeln F. Falls σ für F kollisionsfrei ist, geben Sie $\sigma(F)$ an; andernfalls geben Sie an, wo eine Kollision auftritt.

(i) $\sigma = \{x/c,\ y/f(c, g(x))\} \qquad F = \forall x(p(g(x), f(x, y)) \vee q(x))$

(ii) $\sigma = \{x/f(g(x), c)\} \qquad F = \exists y(p(x, y) \vee \exists z \forall x(f(z, c) \doteq f(c, x)))$

(iii) $\sigma = \{y/g(x),\ z/g(y)\} \qquad F = p(x, y) \to \forall x(q(f(x, z)) \vee \exists y(q(f(x, y))))$

(b) Betrachten Sie jeweils die folgenden Formeln F und G. Geben Sie einen allgemeinsten Unifikator μ sowie das Ergebnis $\mu(F) = \mu(G)$ der Unifikation an, falls sie unifizierbar sind.

(Hierbei sind a, b Konstanten, f, g, h Funktionssymbole und v, x, y, z Variablen.)

(i)	$F = f(x,\ z,\ z)$	$G = f(g(a,\ y),\ h(v),\ h(y))$
(ii)	$F = f(g(x,\ z),\ z,\ h(b,\ x))$	$G = f(g(a,\ y),\ h(v,\ a),\ y)$
(iii)	$F = g(x,\ y)$	$G = g(f(y),\ f(x))$
(iv)	$F = f(g(y),\ h(y,\ g(y)))$	$G = f(z,\ h(g(x),\ g(g(x))))$

Aufgabe 4

Eine Substitution θ ist allgemeiner als eine Substitution σ, geschrieben $\theta \geqslant \sigma$, wenn es eine Substitution τ gibt, so daß $\tau \circ \theta = \sigma$.

(a) Es seien die folgenden Substitutionen gegeben:

$$\mu_1 = \{x/y,\ r/y,\ u/y,\ v/f(z)\}$$
$$\mu_2 = \{r/x,\ y/x,\ u/x,\ v/f(x),\ z/x\}$$
$$\mu_3 = \{x/a,\ y/a,\ z/b,\ u/a,\ v/f(b),\ r/a\}$$

Prüfen Sie für jedes mögliche Paar (μ_i, μ_j), ob $\mu_i \geqslant \mu_j$, und geben Sie ggf. die entsprechende Substitution τ an.

(b) Zeigen Sie folgende Eigenschaften von $\geqslant$:

(i) Reflexivität: $\theta \geqslant \theta$ für alle θ.

(ii) Transitivität: Falls $\theta \geqslant \sigma$ und $\sigma \geqslant \mu$, dann auch $\theta \geqslant \mu$ für alle θ, σ, μ.

(iii) Keine Antisymmetrie: Aus $\theta \geqslant \sigma$ und $\sigma \geqslant \theta$ folgt nicht $\theta = \sigma$ für alle θ, σ.

Sie dürfen dabei die Assoziativität der Substitutionskomposition $\circ$ benutzen.