Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Theoretische Informatik
Prof. Dr. Bernhard Beckert
Thorsten Bormer, Dr. Vladimir Klebanov, Dr. Mattias Ulbrich

Formale Systeme, WS 2014/2015

Übungsblatt 5

Dieses Übungsblatt wird in der Übung am 28.11.2014 besprochen.

Aufgabe 1

In dieser Aufgabe sollen Aussagen über Verwandtschaftsbeziehungen in Prädikatenlogik formalisiert werden. Die Signatur $\Sigma_{\text{Verwandtschaft}}$ enthalte die zweistelligen Prädikate *mutter* und *vater*. Formeln werden in Interpretationen ausgewertet, in denen das Universum eine Menge von Personen ist. Dabei bedeutet die Aussage $I(\mathit{mutter})(a, b)$ (bzw. $I(\mathit{vater})(a, b)$), dass a die Mutter (der Vater) von b ist. Formalisieren Sie in der Signatur $\Sigma_{\text{Verwandtschaft}}$:

(a) „Jede Person hat genau eine Mutter.“

(b) „Niemand kann ein Elternteil seiner eigenen Eltern sein.“

(c) „Dagobert ist der Onkel von Donald.“
Seien dazu *Donald* und *Dagobert* zwei Konstantensymbole in $\Sigma_{\text{Verwandtschaft}}$.

Aufgabe 2

In der Vorlesung wurden die beiden Interpretationen $\mathcal{Z}$ und $\mathcal{Z}_{\text{Jint}}$ der Signatur, die $0, 1, +, *$ (Funktionssymbole) und $<$ (Prädikatsymbol) enthält, vorgestellt. Der Ausdruck 2 ist damit kein gültiger Term in der Signatur. Er steht hier als Abkürzung für den Term $(1 + 1)$.

Überprüfen Sie, ob die folgenden Formeln in $\mathcal{Z}$ und $\mathcal{Z}_{\text{Jint}}$ erfüllt sind oder nicht. Begründen Sie jeweils kurz.

(a) $\forall y(\exists k_1(2 * k_1 \doteq y) \to \exists k_2(2 * k_2 \doteq y + 2))$

(b) $\forall x(0 < x \to x < x + x)$

(c) $\exists x \forall y(x < y \lor x \doteq y)$

Aufgabe 3

Sei Σ eine prädikatenlogische Signatur mit einem zweistelligen Prädikatensymbol p.

(a) Geben Sie eine prädikatenlogische Formel F über Σ an, so dass gilt: Eine Interpretation (D, I) ist genau dann Modell von F, wenn die Relation $I(p)$ eine *strikte Halbordnung* (also transitiv und irreflexiv) auf D ist.

(b) Geben Sie eine erfüllbare prädikatenlogische Formel G über Σ an, so dass gilt: Wenn eine Interpretation (D, I) Modell von G ist, dann ist D unendlich.

Aufgabe 4

Geben Sie für jede der folgenden Formeln an, ob sie erfüllbar, allgemeingültig, unerfüllbar oder keine Formel der Prädikatenlogik erster Stufe ist. Begründen Sie Ihre Entscheidungen.

(a) $\phi_a = \exists x \neg(\forall x(f(x) \doteq f(x)))$

(b) $\phi_b = \forall x(f(x) \doteq c) \to f(f(f(c))) \doteq c$

(c) $\phi_c = \forall x(\forall y(p(x) \vee \neg p(y)))$

(d) $\phi_d = \forall x((p(x) \doteq \mathbf{1} \wedge p(x) \doteq q(x)) \to q(x) \doteq \mathbf{1})$

(e) $\phi_e = ((r \to s) \to r) \to (r \to (s \to r))$

Bemerkung: p, q, r, s sind Prädikatssymbole, f, g Funktionssymbole (jeweils mit der richtigen Stelligkeit), c ein Konstantensymbol (nullstelliges Funktionssymbol) und x, y sind Variablen. Eine Formel kann mehr als eine der genannten Eigenschaften haben.