Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Theoretische Informatik
Prof. Dr. Bernhard Beckert
Thorsten Bormer, Dr. Vladimir Klebanov, Dr. Mattias Ulbrich

Formale Systeme, WS 2014/2015

Übungsblatt 8

Dieses Übungsblatt wird in der Übung am 19.12.2014 besprochen.

Aufgabe 1

Zeigen Sie die Unerfüllbarkeit der folgenden Klauselmenge mittels des Resolutionskalküls:

$$\{\ \{p(x_1, f(x_1))\},\quad \{\neg p(x_2, x_3), \neg p(x_3, x_4), p(x_2, x_4)\},\quad \{p(g(d), x_8)\},\quad \{\neg p(c, c), \neg p(d, g(x_7))\},\quad \{p(x_5, x_6), \neg p(x_6, x_5)\}\ \}$$

Darin sind p ein zweistelliges Prädikatensymbol, $x_1, \ldots, x_8$ Variablen, f, g einstellige Funktionssymbole und c, d Symbole für konstante Funktionen.

Geben Sie für alle Resolutionsschritte den verwendeten Unifikator an.

Lösung zu Aufgabe 1

Nummeriere die gegebenen Klauseln (1) bis (5).

(6)	$\{\neg p(f(x_1), x_4), p(x_1, x_4)\}$	[1, 2]	$\mu = \{x_2/x_1, x_3/f(x_1)\}$
(7)	$\{p(f(x_1), x_1)\}$	[1, 5]	$\mu = \{x_5/f(x_1), x_6/x_1\}$
(8)	$\{p(x_1, x_1)\}$	[6, 7]	$\mu = \{x_4/x_1\}$
(9)	$\{\neg p(d, g(x_7))\}$	[8, 4]	$\mu = \{x_1/c\}$
(10)	$\{\neg p(g(x_7, d))\}$	[9, 5]	$\mu = \{x_5/d, x_6/g(x_7)\}$
(11)	$\Box$	[10, 3]	$\mu = \{x_8/d, x_7/d\}$

Hinweis: Es ist hilfreich, wenn man in einigen Klauseln Struktur erkennt: Klausel (2) besagt, dass p transitiv ist und (5), dass p symmetrisch ist. Dies kann man verwenden, um $p(x, x)$ zu resolvieren. Eine zweite Anwendung der Symmetrie sorgt dann für den endgültigen Abschluss.

Aufgabe 2

Es sei eine prädikatenlogische Signatur gegeben, die die einstelligen Prädikatensymbole p, q und r enthält und das einstellige Funktionssymbol f. Zeigen Sie mit Hilfe des prädikatenlogischen Resolutionskalküls, dass die Formel

$$\big((\forall x\ p(x)) \to (\forall x\ q(x))\big) \wedge \big(\forall x(q(x) \to r(x))\big) \to \big(\exists x(p(x) \to r(f(x)))\big)$$

allgemeingültig ist.

Lösung zu Aufgabe 2

Um eine Formel mit dem Resolutionskalkül als allgemeingültig zu beweisen, geht man folgendermaßen vor:

1. negieren der Formel
2. überführen der Formel in Pränexnormalform, Matrix in konjunktiver Form.
3. skolemisieren
4. resolvieren

Negieren und Überführen in PNF Nach einigen ereinfachenden Äquivalenzumformungen ist das Negat

$$
\begin{aligned}
&\big((\forall x_1\ p(x_1)) \to (\forall x_2\ q(x_2))\big)\\
\wedge\ &\big(\forall x_3(q(x_3) \to r(x_3))\big)\\
\wedge\ &\big(\forall x_4(\neg r(f(x_4)) \wedge p(x_4))\big)
\end{aligned}
$$

Wenn die Quantoren herausgezogen sind, lautet die Formel in PNF:

$$
\begin{aligned}
\exists x_1 \forall x_2 \forall x_3 \forall x_4 \quad &\big(\neg p(x_1) \vee q(x_2)\big)\\
\wedge\ &\big(\neg q(x_3) \vee r(x_3)\big)\\
\wedge\ &\big(\neg r(f(x_4)) \wedge p(x_4)\big)
\end{aligned}
$$

Skolemisieren Die Skolemisierung führt ein neues Funktionssymbol c für x_1 ein. Die erfüllbarkeitsäquivalente Formel lautet nun:

$$
\begin{aligned}
&\big(\neg p(c) \vee q(x_2)\big)\\
\wedge\ &\big(q(x_3) \vee r(x_3)\big)\\
\wedge\ &\neg r(f(x_4)) \quad \wedge \quad p(x_4)
\end{aligned}
$$

wobei die Allquantoren als implizit angenommen und daher weggelassen wurden.

Resolution Die Ausgangs-Klauselmenge lautet nun:

1. $\{\neg p(c), q(x_2)\}$
2. $\{\neg q(x_3), r(x_3)\}$
3. $\{\neg r(f(x_4))\}$
4. $\{p(x_4)\}$

Weitere Resolution ergibt:

5.	$\{q(x_2)\}$	1,4	$\sigma = \{x_4/c\}$
6.	$\{r(x_3)\}$	5,2	$\sigma = \{x_2/x_4\}$
7.	$\square$	6,3	$\sigma = \{x_4/f(x_4)\}$

Aufgabe 3

Betrachten wir – nur für diese Übungsaufgabe – die folgende geänderte Version der Definition von $Res(M)$ aus Definition 5.17 im Skript:

$$Res'(M) = \ \{B \mid \text{ es gibt Klauseln } C_1, C_2 \text{ aus } M, \text{ so dass } B \text{ eine Resolvente von } C_1, C_2 \text{ ist.}\}$$

Gegenüber der offiziellen Definition ist die Variantenbildung, d.h. die Umbennung der Variablen in C_1, C_2, weggefallen. Wie wird dadurch Korrektheit und Vollständigkeit des Kalküls beeinflußt? Geben Sie ein Beispiel an, das dies belegt.

Lösung zu Aufgabe 3

Wegen $Res'(M) \subseteq Res(M)$ ist der modifizierte Kalkül auf jeden Fall noch korrekt. Er ist aber nicht mehr vollständig. Die Formelmenge $\{\forall x(p(x, f(x))), \neg\exists x(p(a, x))\}$ ist sicherlich unerfüllbar. Nach Umwandlung in Klauselnormalform erhalten wir $\{\{p(x, f(x))\}, \{\neg p(a, x)\}\}$. Die beiden Einerklauseln $\{p(x, f(x))\}$, $\{\neg p(a, x)\}$ sind allerdings nicht resolvierbar, da die Unifikation von x mit $f(x)$ in der zweiten Argumentstelle von p nicht möglich ist. Dagegen liefert die Resolution von $\{p(x, f(x))\}$ mit $\{\neg p(a, y)\}$ sofort die leere Klausel.

Aufgabe 4

Zeigen Sie oder widerlegen Sie mithilfe des Tableaukalküls für die Aussagenlogik die Allgemeingültigkeit folgender Formeln. Falls eine der Formeln nicht allgemeingültig ist, geben Sie eine erfüllende Belegung ihres Negats als Gegenbeispiel an.

(a) $((A \to B) \to C) \to (B \to C)$

(b) $(B \to C) \to ((A \to B) \to C)$

Lösung zu Aufgabe 4

Abbildung 1 zeigt Tableaubeweise für beide Teilaufgaben. Das Tableau für Teilaufgabe (a) lässt sich schließen, die Allgemeingültigkeit der Formel φ_a ist damit bewiesen.

Das Tableau für die Formel $\neg\varphi_b$ lässt sich auch im erschöpften Zustand nicht schließen, daher ist $\neg\varphi_b$ erfüllbar, φ_b also nicht allgemeingültig.

Die Abbildungen sind mit der Vorzeichen-Variante des Kalküls aus der Vorlesung erstellt und die Regelanwendungen darin markiert. Dabei steht eine rote Kante für eine α- und eine blaue für eine β-Erweiterung. Die jeweils letzten Formeln im Tableau von (b) gehen aus der β-Formel $1B \to C$ hervor.

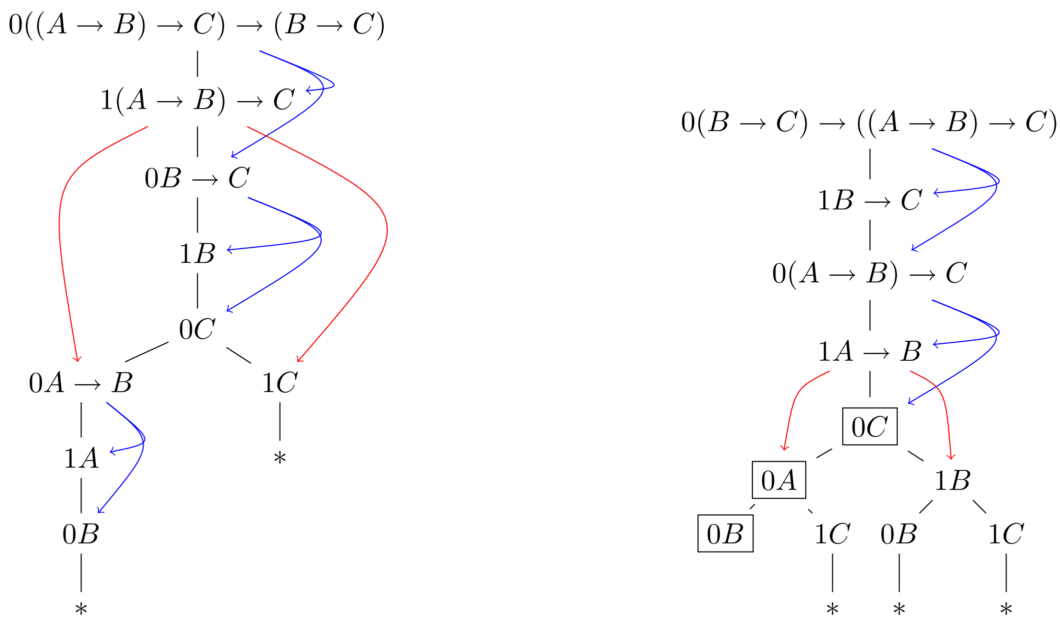

Abbildung 1: Tableaubeweise zu Aufgabe 4(a) (links) und 4(b) (rechts)

Ein erschöpftes, nicht geschlossenes Tableau hat einen Ast, der nicht geschlossen werden kann. Dieser Erlaubt das Ablesen einer Interpretation, die die Wurzelformel erfüllt: Setze für jede Variable $P \in \Sigma$

- wenn $0P$ auf dem Ast vorkommt $I(P) := F$,
- wenn $1P$ auf dem Ast vorkommt $I(P) := W$.
- andernfalls $I(P)$ beliebig.

Zur Begründung siehe Lemma 3.34 im Skript.

Insbesondere wird die Wurzel des Baumes erfüllt, das Negat der Formel, die auf Allgemeingültigkeit überprüft werden soll. Für diese Formel ist die Belegung also ein Gegenbeispiel zur Allgemeingültigkeit.

Für (b) ist das der Fall für die Belegung I mit $I(A) = I(B) = I(C) = F$. Denn dann gilt: $\mathrm{val}_I(\phi_b) = F$.