

## Formale Systeme, WS 2014/2015

### Übungsblatt 9

Dieses Übungsblatt wird in der Übung am 9.1.2015 besprochen.

#### Aufgabe 1

In der Vorlesung ist folgender Satz als Beispiel für ein Ableitbarkeitsproblem vorgestellt worden und mithilfe des Resolutionskalküls bewiesen worden:

Jede transitive (1), symmetrische (2) und endlose (3) binäre Relation ist reflexiv (4).

Formalisiert als Folgerung in Prädikatenlogik lautet die Aussage folgendermaßen:

$$\{ \quad \forall x \forall y \forall z (r(x, y) \wedge r(y, z) \rightarrow r(x, z)) \quad , \quad (1)$$

$$\forall x \forall y (r(x, y) \rightarrow r(y, x)) \quad , \quad (2)$$

$$\forall x \exists y (r(x, y)) \quad \} \quad (3)$$

$$\models \forall x (r(x, x)) \quad (4)$$

Zeigen Sie mit Hilfe des prädikatenlogischen Tableauekalküls, dass die oben stehende Aussage gilt.

#### Lösung zu Aufgabe 1

siehe Abbildung 1.

#### Aufgabe 2

Zeigen Sie mit Hilfe des prädikatenlogischen Tableauekalküls, dass die Formel

$$\forall y \forall x \forall z ((p(x, z) \rightarrow p(y, z)) \rightarrow q(x, y)) \wedge \neg \exists y \forall x (q(x, x) \vee r(y))$$

unerfüllbar ist.

#### Lösung zu Aufgabe 2

Ein geschlossenes Tableau zu der Vorzeichenformel

$$1 \quad \forall y \forall x \forall z ((p(x, z) \rightarrow p(y, z)) \rightarrow q(x, y)) \wedge \neg \exists y \forall x (q(x, x) \vee r(y))$$

ist in in Abbildung 2 dargestellt. Die schließende Substitution ist dabei:  $\{X_2 = f(X_1), X_3 = f(X_1)\}$

#### Aufgabe 3

Gegeben sei die Formel

$$F = ((\neg B \wedge \neg A) \vee C) \rightarrow ((\neg A \rightarrow B) \rightarrow C)$$

Zeigen Sie mithilfe des Sequenzenkalküls, dass  $F$  allgemeingültig ist.

#### Lösung zu Aufgabe 3

Der Wurzelknoten eines Sequenzenbeweises für eine Formel  $\varphi$  ist markiert mit “ $\rightarrow \varphi$ ”.

Wenn man die Regeln aus der Vorlesung/Skript anwendet, kommt man zu einem Beweisbaum ähnlich zu dem in Abbildung 3. Da alle Blätter des Beweises Axiome sind, ist die Ausgangsformel damit bewiesen.

Im Baum ist jeweils die Formel markiert, auf die die nachfolgende Regel angewendet wird.





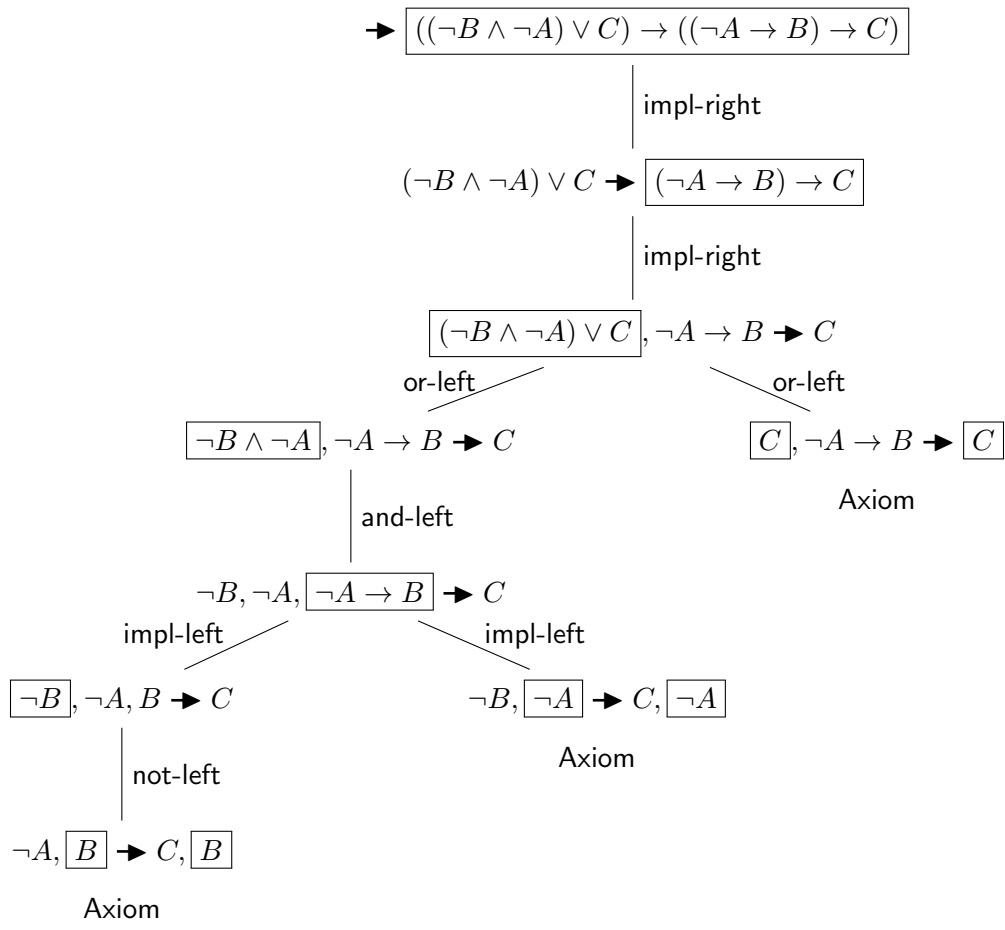


Abbildung 3: Sequenzenbeweisbaum zu Aufgabe 5