# Klausur Formale Systeme

Fakultät für Informatik

SS 2015

Prof. Dr. Bernhard Beckert

31. Juli 2015

**Name:** ______________________

**Vorname:** ______________________

**Matrikel-Nr.:** ______________________

*Die Bearbeitungszeit beträgt 60 Minuten.*

| A1 (10) | A2 (8) | A3 (6) | A4 (7) | A5 (9) | A6 (11) | A7 (9) | Σ (60) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | | |

**Bewertungstabelle bitte frei lassen!**

**Gesamtpunkte:**

# 1 Zur Einstimmung (5+5 = 10 Punkte)

**a.** Kreuzen Sie in der folgenden Tabelle alles Zutreffende an.

Für jede korrekte Antwort gibt es einen Punkt, **für jede falsche Antwort wird ein *halber Punkt* abgezogen!** (Dabei werden jedoch keinesfalls weniger als 0 Punkte für jede der zwei Teilaufgaben vergeben.)

**Hinweise:**

- „PL1“ steht für „Prädikatenlogik erster Stufe (mit Gleichheit $\doteq$)“, wie sie in der Vorlesung vorgestellt wurde. Auf diese beziehen sich in Teilaufgabe a. auch die Begriffe „erfüllbar“, „allgemeingültig“ und „unerfüllbar“.
- $P_1, P_2$, und $p$ sind Prädikatensymbole, $f$ ist ein Funktionssymbol, $c$ ist ein Konstantensymbol, und $x, y$ sind Variablen.
- Es gelten die üblichen Klammereinsparungsregeln.

| | keine Formel der PL1 | allgemeingültig | erfüllbar, aber nicht allgemeingültig | unerfüllbar |
|---|---|---|---|---|
| $\big(\forall x(p(f(x)) \to \neg p(f(x)))\big) \wedge p(c)$ | | | | |
| $\big(\forall x(p(f(x)) \to \neg p(f(x)))\big) \wedge p(f(c))$ | | | | |
| $(P_1 \to P_2) \wedge (P_2 \to \neg P_1)$ | | | | |
| $\exists f\, \forall x\, (f(x) \doteq x)$ | | | | |
| $\big(\forall x\, f(x) \doteq x\big) \to \big(\forall x\, \forall y\, (f(x) \doteq f(y) \to x \doteq y)\big)$ | | | | |

**b.** Bitte kreuzen Sie in der folgenden Tabelle das Zutreffende an. Für korrekte Antworten erhalten Sie einen Punkt, **für falsche Antworten wird *ein Punkt* abgezogen**. Dabei werden jedoch nie weniger als 0 Punkte für diese Teilaufgabe vergeben.

| | Richtig | Falsch |
|---|---|---|
| Jede erfüllbare Formel der Prädikatenlogik mit Gleichheit hat auch ein Modell mit einer unendlichen Domäne. | | |
| Sei $\Sigma$ eine endliche aussagenlogische Signatur. Wenn für zwei aussagenlogische Formeln $F$ und $G$ über $\Sigma$ die Formel $F \to G$ allgemeingültig ist, so hat $G$ mindestens so viele erfüllende Belegungen wie $F$. | | |
| Die beiden prädikatenlogischen Terme $h(f(x), g(y))$ und $h(f(y), g(f(x)))$ sind unifizierbar. | | |
| Wenn in einer Kripkestruktur $\mathcal{K} = (S, R, I)$ die Formel $A$ in allen Zuständen $s \in S$ wahr ist, dann ist auch $\Box A$ in allen Zuständen wahr. | | |
| Wenn eine aussagenlogische Formel allgemeingültig ist,<br>dann hat der reduzierte Shannongraph zu dieser Formel genau einen Knoten. | | |

## 2 Beweis für eine Eigenschaft aussagenlogischer Klauseln (8 Punkte)

Beweisen Sie den folgenden Satz:

> **Satz.** Eine Menge $M$ aussagenlogischer Klauseln über der Signatur $\Sigma$ ist *genau dann* allgemeingültig, wenn für jede Klausel $K \in M$ gilt:
>
> $$\text{es gibt eine aussagenlogische Variable } P_K \in \Sigma \text{ mit:} \quad P_K \in K \text{ und } \neg P_K \in K \qquad (*)$$

Der Beweis hat zwei Teile:

**a.** Annahme: Jede Klausel $K$ in $M$ habe die Eigenschaft $(*)$.

Zu zeigen: $M$ ist allgemeingültig, also unter jeder Belegung $V$ wahr.

**b.** Annahme: $M$ sei allgemeingültig.

Zu zeigen: Jede Klausel $K \in M$ habe die Eigenschaft $(*)$.

## 3 Aussagenlogik, kurze KNF (1+5 = 6 Punkte)

Gegeben sei eine aussagenlogische Signatur $\Sigma$ mit $2n$ Variablen $A_1, \ldots, A_n, B_1, \ldots, B_n$.

Die schematische aussagenlogische Formel

$$\phi = \neg(A_1 \leftrightarrow B_1) \vee \ldots \vee \neg(A_n \leftrightarrow B_n)$$

über $\Sigma$ hat die folgende Eigenschaft: $\phi$ ist genau dann in einer Variablenbelegung wahr, wenn es (mindestens) einen Index $1 \leqslant i \leqslant n$ gibt, so dass $A_i$ und $B_i$ unterschiedlich belegt sind.

**a.** Geben Sie eine schematische aussagenlogische Formel $\chi$ über $\Sigma$ an, die äquivalent zu $\phi$ ist und nur Konjunktion $\wedge$, Disjunktion $\vee$ und Negation $\neg$ als logische Operationen enthält.

**b.** Geben Sie eine aussagenlogische Formel $\psi$ über einer geeigneten Signatur an, die in konjunktiver Normalform und erfüllbarkeitsäquivalent zu $\phi$ und $\chi$ ist. Machen Sie dabei Ihre Vorgehensweise deutlich.

**Hinweis:** Nutzen Sie zur Konstruktion die in der Vorlesung vorgestellte Idee der kurzen KNF.

## 4 Formalisieren in PL1 (1+2+1+3 = 7 Punkte)

Formalisieren Sie die vier folgenden Aussagen mittels Prädikatenlogik erster Stufe mit Gleichheit. Benutzen Sie dafür jeweils die angegebenen interpretierten Symbole.

**a.** Kein Mensch ist eine Insel.
Prädikate: $mensch(\cdot)$, $insel(\cdot)$.

---

**b.** Es gibt nur ein Rudi Völler.
Prädikat: *rudivöller*$(\cdot)$.

---

**c.** Nur die Liebe zählt.
Prädikate: $liebe(\cdot)$, *zählt*$(\cdot)$.

---

**d.** Wenn zwei sich streiten, freut sich der dritte.
Prädikate: $streiten(\cdot, \cdot)$, $freuen(\cdot)$.

---

## 5 Tableau (5+4 = 9 Punkte)

Die folgenden beiden Teilaufgaben erfordern die Erstellung eines Tableaus. Notieren Sie in jedem Tableau:

- bei jeder Erweiterung: Durch welche Regelanwendung eine Formel auf dem Tableau entstanden ist,
- bei Abschlüssen: Die beiden Partner,
- die schließende Substitution.

**a.** Vervollständigen Sie den folgenden Tableau-Beweis:

$$1\ \neg p(c,d) \quad (1)$$
$$|$$
$$1\ \forall y \exists x\ p(x,y) \quad (2)$$
$$|$$
$$1\ \forall z\ (p(z,c) \rightarrow \forall y\ \neg p(y,d)) \quad (3)$$
$$|$$

## Fortsetzung: Tableau

**b.** Zeigen Sie, dass folgende Formel $F$ **allgemeingültig** ist. Ergänzen Sie zunächst vor der Wurzel in folgendem Tableaubeweis das dazu benötigte Vorzeichen. Schließen Sie dann das Tableau.

**Hinweis:** Vergeben Sie Abkürzungen für Teilformeln von $F$ (durch geeignetes Markieren der Teilformeln und Benennung im dafür vorgesehenen Kasten), die Sie dann im Beweis verwenden können.

Vorzeichen $\boxed{\phantom{X}}$ $$\overbrace{\Big((\forall x\ q(x)) \to \big(\exists z \forall y\ q(y) \lor p(z,z)\big)\Big) \lor \neg\big(\exists z \forall y\ q(y) \lor p(z,z)\big)}^{F} \qquad (1)$$

Abk. für Teilformeln

# 6 Spezifikation mit der Java Modeling Language (4+4+3 = 11 Punkte)

**Hinweis:** Zur Erinnerung ist hier die Syntax einiger JML-Konstrukte wiederholt:

| | |
|---|---|
| Allquantor | (`\forall` $T$ $x$ ; *Bedingung* ; *Bedingung*) |
| Existenzquantor | (`\exists` $T$ $x$ ; *Bedingung* ; *Bedingung*) |
| Summe | (`\sum` $T$ $x$ ; *Bedingung* ; *Ausdruck*) |
| Minimum | (`\min` $T$ $x$ ; *Bedingung* ; *Ausdruck*) |

In dieser Aufgabe werden zweidimensionale Felder (Typ `int[][]`) verwendet. Wir nehmen an, dass der erste Index die Zeile und der zweite die Spalte in diesem Feld angibt. `coll[i][j]` ist damit der Wert in der $i$-ten Zeile und $j$-ten Spalte.

Gegeben sei die Klasse `C`, die folgendermaßen definiert ist.

```
class C {
    int[][] coll;

    /*@ public normal_behaviour
      @   ensures \result <==>
      @     (\exists int i; 0<=i && i<coll.length;
      @      (\forall int j; 0<=j && j<a.length;
      @       (\exists int k; 0<=k && k<coll[i].length;
      @        a[j] == coll[i][k])));
      @   assignable \nothing;
      @*/
    boolean m(int[] a) { ... }
}
```

**Aufgaben:**

**a.** Geben Sie in natürlicher Sprache wieder, was der Methodenvertrag für die Methode `m` besagt.

## Fortsetzung: Spezifikation mit der Java Modeling Language

**b.** Geben Sie eine Klasseninvariante für die Klasse `C` an, die folgendes formalisiert:

> Jede Zeile in `coll` hat dieselbe Anzahl von Spalten.

```
/*@ invariant
  @
  @
  @
  @
  @*/
```

**c.** Die Klasse `C` soll nun um eine neue Methode `sums` erweitert werden. Ergänzen Sie dazu den unten stehenden Methodenvertrag um eine Nachbedingung, die besagt:

> Die Methode liefert eine Referenz auf ein Feld zurück, dessen Länge gleich der Zahl der Zeilen von `coll` ist.
>
> Jeder Wert in diesem Feld ist gleich der Summe der Einträge der entsprechenden Zeile in `coll`.

```
/*@ public normal_behaviour
  @   requires true;
  @   ensures
  @
  @
  @
  @
  @
  @
  @
  @
  @
  @   assignable \nothing;
  @*/
int[] sums() { ... }
```

## 7 Büchi-Automaten und LTL (2+3+3+1 = 9 Punkte)

Gegeben sei die aussagenlogische Signatur $\Sigma = \{a\}$.

**a.** Vervollständigen Sie den vorgegebenen Büchi-Automaten $\mathcal{A}$ über dem Alphabet $V = \{\emptyset, \{a\}\}$ so, dass er die wie folgt beschriebene Sprache $L$ akzeptiert:

$$L = \{w \in V^\omega \mid \text{es gibt genau ein } n \in \mathbb{N}, \text{ so dass } a \in w(n)\}$$

**Hinweis:** Es existiert eine Lösung, die mit den vorgegebenen zwei Zuständen auskommt – Lösungen mit weiteren Zuständen sind auch erlaubt.
Denken Sie daran, den Anfangszustand sowie die finalen Zustände des Automaten zu kennzeichnen.

$\mathcal{A}$:

**b.** Geben Sie zu der in Teilaufgabe **a.** gegebenen Sprache $L$ eine äquivalente Formel $\varphi$ in linearer temporaler Logik (LTL) unter Verwendung der atomaren Aussage $a$ an (d.h., es muss gelten: $L = \{\xi \in V^\omega : \xi \models \varphi\}$).

Lösung: $\varphi =$ ______________________________

**c.** Nennen Sie die notwendigen Schritte, um die **Erfüllbarkeit** einer LTL-Formel $F$ mit Hilfe von Büchi-Automaten zu überprüfen.

1. Man konstruiert ______________________________

   ______________________________

2. Es gilt: $F$ ist genau dann erfüllbar, wenn ______________________________

   ______________________________

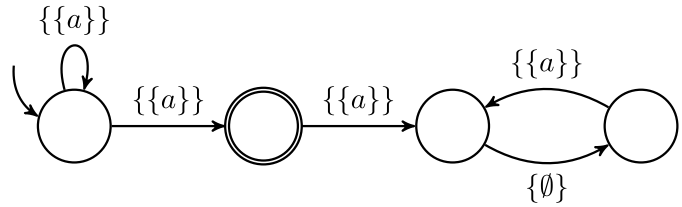
3. Dies überprüft man, indem ______________________________

   ______________________________

# Fortsetzung: Büchi-Automaten und LTL

**d.** Geben Sie zu folgendem Büchi-Automaten $\mathcal{B}$ eine LTL-Formel $\psi$ an, so dass $L^\omega(\mathcal{B}) = \{\xi \in V^\omega : \xi \models \psi\}$ gilt.

$\mathcal{B}$:




Lösung: $\psi =$ ______________________________