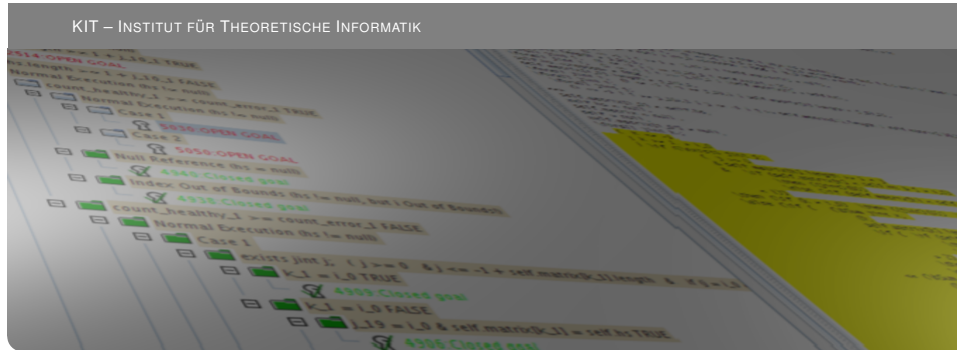


Formale Systeme

Prof. Dr. Bernhard Beckert, WS 2015/2016

Aussagenlogik: Syntax und Semantik

KIT – INSTITUT FÜR THEORETISCHE INFORMATIK



Sudoku

5	3			7				
6			1	9	5			
	9	8					6	
8				6				3
4			8		3			1
7				2				6
	6					2	8	
			4	1	9			5
				8			7	9

5	3			7				
6			1	9	5			
	9	8					6	
8				6				3
4			8		3			1
7				2				6
	6					2	8	
			4	1	9			5
				8			7	9

Vervollständigen Sie das Sudoku so, dass

- ▶ in jeder der neun Spalten
- ▶ in jeder der neun Reihen
- ▶ und in jeder der neun Regionen

alle Zahlen von 1 bis 9 vorkommen.

5	3	4	6	7	8	9	1	2
6	7	2	1	9	5	3	4	8
1	9	8	3	4	2	5	6	7
8	5	9	7	6	1	4	2	3
4	2	6	8	5	3	7	9	1
7	1	3	9	2	4	8	5	6
9	6	1	5	3	7	2	8	4
2	8	7	4	1	9	6	3	5
3	4	5	2	8	6	1	7	9

Wir führen für jede Zellenposition (i, j) des Sudoku und jede Zahl k zwischen 1 und 9 eine Boolesche Variable

$$D_{i,j}^k$$

ein, mit der Vorstellung, dass $D_{i,j}^k$ den Wert *wahr* hat, wenn auf dem Feld (i, j) die Zahl k steht.

Wir führen für jede Zellenposition (i, j) des Sudoku und jede Zahl k zwischen 1 und 9 eine Boolesche Variable

$$D_{i,j}^k$$

ein, mit der Vorstellung, dass $D_{i,j}^k$ den Wert *wahr* hat, wenn auf dem Feld (i, j) die Zahl k steht.

Wir benutzen kartesische Koordinaten zur Notation von Positionen.

Wir führen für jede Zellenposition (i, j) des Sudoku und jede Zahl k zwischen 1 und 9 eine Boolesche Variable

$$D_{i,j}^k$$

ein, mit der Vorstellung, dass $D_{i,j}^k$ den Wert *wahr* hat, wenn auf dem Feld (i, j) die Zahl k steht.

Wir benutzen kartesische Koordinaten zur Notation von Positionen.

So ist z.B. $D_{9,1}^9$ wahr, wenn in der rechten unteren Ecke die Zahl 9 steht.

$$D_{1,9}^1 \vee D_{2,9}^1 \vee D_{3,9}^1 \vee D_{4,9}^1 \vee D_{5,9}^1 \vee D_{6,9}^1 \vee D_{7,9}^1 \vee D_{8,9}^1 \vee D_{9,9}^1$$

sagt, dass die Ziffer 1 mindestens einmal in der ersten Zeile vorkommen muß.

$$D_{1,9}^1 \vee D_{2,9}^1 \vee D_{3,9}^1 \vee D_{4,9}^1 \vee D_{5,9}^1 \vee D_{6,9}^1 \vee D_{7,9}^1 \vee D_{8,9}^1 \vee D_{9,9}^1$$

sagt, dass die Ziffer 1 mindestens einmal in der ersten Zeile vorkommen muß.

$$D_{1,1}^1 \vee D_{1,2}^1 \vee D_{1,3}^1 \vee D_{1,4}^1 \vee D_{1,5}^1 \vee D_{1,6}^1 \vee D_{1,7}^1 \vee D_{1,8}^1 \vee D_{1,9}^1$$

sagt, dass die Ziffer 1 mindestens einmal in der ersten Spalte vorkommen muß.

$$D_{1,9}^1 \vee D_{2,9}^1 \vee D_{3,9}^1 \vee D_{4,9}^1 \vee D_{5,9}^1 \vee D_{6,9}^1 \vee D_{7,9}^1 \vee D_{8,9}^1 \vee D_{9,9}^1$$

sagt, dass die Ziffer 1 mindestens einmal in der ersten Zeile vorkommen muß.

$$D_{1,1}^1 \vee D_{1,2}^1 \vee D_{1,3}^1 \vee D_{1,4}^1 \vee D_{1,5}^1 \vee D_{1,6}^1 \vee D_{1,7}^1 \vee D_{1,8}^1 \vee D_{1,9}^1$$

sagt, dass die Ziffer 1 mindestens einmal in der ersten Spalte vorkommen muß.

$$D_{1,1}^1 \vee D_{1,2}^1 \vee D_{1,3}^1 \vee D_{2,1}^1 \vee D_{2,2}^1 \vee D_{2,3}^1 \vee D_{3,1}^1 \vee D_{3,2}^1 \vee D_{3,3}^1$$

sagt, dass die Ziffer 1 mindestens einmal in der Region links unten vorkommen muss.

Die bisherigen Formeln beschreiben Sudoku noch nicht genau.

Die bisherigen Formeln beschreiben Sudoku noch nicht genau.

Man muss noch sagen, dass auf jeder Zelle höchstens **eine** Zahl stehen kann.

Zusätzliche AL-Formeln

Die bisherigen Formeln beschreiben Sudoku noch nicht genau.

Man muss noch sagen, dass auf jeder Zelle höchstens **eine** Zahl stehen kann.

$$\begin{aligned}
 &\neg(D_{1,1}^1 \wedge D_{1,1}^2), \neg(D_{1,1}^1 \wedge D_{1,1}^3), \neg(D_{1,1}^1 \wedge D_{1,1}^4), \neg(D_{1,1}^1 \wedge D_{1,1}^5), \\
 &\neg(D_{1,1}^1 \wedge D_{1,1}^6), \neg(D_{1,1}^1 \wedge D_{1,1}^7), \neg(D_{1,1}^1 \wedge D_{1,1}^8), \neg(D_{1,1}^1 \wedge D_{1,1}^9), \\
 &\neg(D_{1,1}^2 \wedge D_{1,1}^3), \neg(D_{1,1}^2 \wedge D_{1,1}^4), \neg(D_{1,1}^2 \wedge D_{1,1}^5), \neg(D_{1,1}^2 \wedge D_{1,1}^6), \\
 &\neg(D_{1,1}^2 \wedge D_{1,1}^7), \neg(D_{1,1}^2 \wedge D_{1,1}^8), \neg(D_{1,1}^2 \wedge D_{1,1}^9), \neg(D_{1,1}^3 \wedge D_{1,1}^4),
 \end{aligned}$$

usw.

Allgemein:

$$\neg(D_{i,j}^s \wedge D_{i,j}^t)$$

für alle $1 \leq i, j, s, t \leq 9$ mit $s < t$.

Allgemein:

$$\neg(D_{i,j}^s \wedge D_{i,j}^t)$$

für alle $1 \leq i, j, s, t \leq 9$ mit $s < t$.

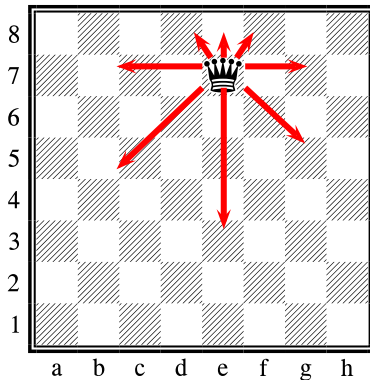
Ergibt $81 * 36 = 2916$ Formeln.

Das 8-Damen-Problem

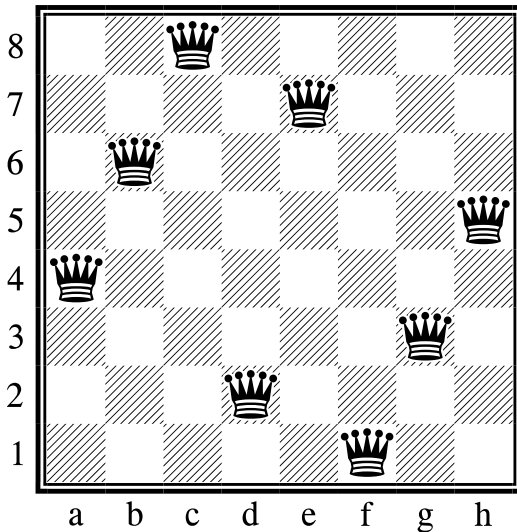
Man plaziere acht Damen so auf einem Schachbrett, dass sie sich gegenseitig nicht bedrohen.

Das 8-Damen-Problem

Man platziere acht Damen so auf einem Schachbrett, dass sie sich gegenseitig nicht bedrohen.



Eine Lösung des 8-Damen-Problems



Wiederholung

Syntax und Semantik der Aussagenlogik

Logische Zeichen

Logische Zeichen

- 1 Symbol für den Wahrheitswert „wahr“

Logische Zeichen

- 1** Symbol für den Wahrheitswert „wahr“
- 0** Symbol für den Wahrheitswert „falsch“

Logische Zeichen

- 1** Symbol für den Wahrheitswert „wahr“
- 0** Symbol für den Wahrheitswert „falsch“
- $\neg$ Negationssymbol („nicht“)

Logische Zeichen

- 1** Symbol für den Wahrheitswert „wahr“
- 0** Symbol für den Wahrheitswert „falsch“
- $\neg$ Negationssymbol („nicht“)
- $\wedge$ Konjunktionssymbol („und“)

Logische Zeichen

- 1** Symbol für den Wahrheitswert „wahr“
- 0** Symbol für den Wahrheitswert „falsch“
- $\neg$ Negationssymbol („nicht“)
- $\wedge$ Konjunktionssymbol („und“)
- $\vee$ Disjunktionssymbol („oder“)

Logische Zeichen

- 1** Symbol für den Wahrheitswert „wahr“
- 0** Symbol für den Wahrheitswert „falsch“
- $\neg$ Negationssymbol („nicht“)
- $\wedge$ Konjunktionssymbol („und“)
- $\vee$ Disjunktionssymbol („oder“)
- $\rightarrow$ Implikationssymbol („wenn . . . dann“)

Logische Zeichen

- 1** Symbol für den Wahrheitswert „wahr“
- 0** Symbol für den Wahrheitswert „falsch“
- $\neg$ Negationssymbol („nicht“)
- $\wedge$ Konjunktionssymbol („und“)
- $\vee$ Disjunktionssymbol („oder“)
- $\rightarrow$ Implikationssymbol („wenn . . . dann“)
- $\leftrightarrow$ Symbol für beiderseitige Implikation („genau dann, wenn“)

Logische Zeichen

- 1** Symbol für den Wahrheitswert „wahr“
- 0** Symbol für den Wahrheitswert „falsch“
- $\neg$ Negationssymbol („nicht“)
- $\wedge$ Konjunktionssymbol („und“)
- $\vee$ Disjunktionssymbol („oder“)
- $\rightarrow$ Implikationssymbol („wenn . . . dann“)
- $\leftrightarrow$ Symbol für beiderseitige Implikation („genau dann, wenn“)
- (,) die beiden Klammern

Signatur

Eine (aussagenlogische) *Signatur* ist eine abzählbare Menge Σ von Symbolen, etwa

$$\Sigma = \{P_0, \dots, P_n\}$$

oder

$$\Sigma = \{P_0, P_1, \dots\}.$$

Die Elemente von Σ heißen auch *atomare Aussagen*, *Atome* oder *Aussagevariablen*.

Formeln der Aussagenlogik

Zur Signatur Σ ist $For0_\Sigma$, die Menge der
Formeln über Σ

induktiv definiert durch

- ▶ $\mathbf{1} \in For0_\Sigma$
- $\mathbf{0} \in For0_\Sigma$
- $\Sigma \subseteq For0_\Sigma$

Formeln der Aussagenlogik

Zur Signatur Σ ist $For0_\Sigma$, die Menge der
Formeln über Σ

induktiv definiert durch

- ▶ $1 \in For0_\Sigma$
 $0 \in For0_\Sigma$
 $\Sigma \subseteq For0_\Sigma$
- ▶ wenn $A, B \in For0_\Sigma$ dann sind auch
 $\neg A$
 $(A \wedge B)$
 $(A \vee B)$
 $(A \rightarrow B)$
 $(A \leftrightarrow B)$

Elemente von $For0_\Sigma$

Interpretation

Es sei Σ eine aussagenlogische Signatur. Eine **Interpretation** über Σ ist eine beliebige Abbildung

$$I : \Sigma \rightarrow \{W, F\}.$$

Auswertung

Zu jedem I über Σ wird eine zugehörige **Auswertung** der Formeln über Σ definiert

$$val_I : For0_\Sigma \rightarrow \{W, F\}$$

mit:

$$val_I(\mathbf{1}) = W$$

$$val_I(\mathbf{0}) = F$$

$$val_I(P) = I(P) \quad \text{für jedes } P \in \Sigma$$

$$val_I(\neg A) = \begin{cases} F & \text{falls } val_I(A) = W \\ W & \text{falls } val_I(A) = F \end{cases}$$

Auswertung (Forts.)

val_I auf $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$, $(A \rightarrow B)$, $(A \leftrightarrow B)$ wird gemäß der folgenden Tabelle berechnet

$val_I(A)$	$val_I(B)$	$val_I(A \wedge B)$	$val_I(A \vee B)$	$val_I(A \rightarrow B)$	$val_I(A \leftrightarrow B)$
W	W	W	W	W	W
W	F	F	W	F	F
F	W	F	W	W	F
F	F	F	F	W	W

Definition

- ▶ Ein **Modell** einer Formel $A \in For0_\Sigma$ ist eine Interpretation I über Σ mit $val_I(A) = W$.

Definition

- ▶ Ein **Modell** einer Formel $A \in For0_\Sigma$ ist eine Interpretation I über Σ mit $val_I(A) = W$.
- ▶ Zu einer **Formelmenge** $M \subseteq For0_\Sigma$ ist ein Modell von M eine Interpretation I , welche Modell von jedem $A \in M$ ist.

Definition

- ▶ Ein **Modell** einer Formel $A \in For0_\Sigma$ ist eine Interpretation I über Σ mit $val_I(A) = W$.
- ▶ Zu einer Formel**menge** $M \subseteq For0_\Sigma$ ist ein Modell von M eine Interpretation I , welche Modell von jedem $A \in M$ ist.
- ▶ $A \in For0_\Sigma$ heißt **allgemeingültig**
gdw
 $val_I(A) = W$ für jede Interpretation I über Σ .

Definition

- ▶ Ein **Modell** einer Formel $A \in For0_\Sigma$ ist eine Interpretation I über Σ mit $val_I(A) = W$.
- ▶ Zu einer Formelm**enge** $M \subseteq For0_\Sigma$ ist ein Modell von M eine Interpretation I , welche Modell von jedem $A \in M$ ist.
- ▶ $A \in For0_\Sigma$ heißt **allgemeingültig**
gdw
 $val_I(A) = W$ für jede Interpretation I über Σ .
- ▶ $A \in For0_\Sigma$ heißt **erfüllbar**
gdw
es gibt eine Interpretation I über Σ mit $val_I(A) = W$.

Definition

Σ sei eine Signatur, $M \subseteq For_0_\Sigma$, $A, B \in For_0_\Sigma$.

► $M \models A$ lies: aus M folgt A

gdw

Jedes Modell von M ist auch Modell von A .

Definition

Σ sei eine Signatur, $M \subseteq \text{For}_0_\Sigma$, $A, B \in \text{For}_0_\Sigma$.

- ▶ $M \models A$ lies: aus M folgt A
gdw
Jedes Modell von M ist auch Modell von A .
- ▶ $A, B \in \text{For}_0_\Sigma$ heißen logisch äquivalent
gdw
 $\{A\} \models_\Sigma B$ und $\{B\} \models_\Sigma A$

$$A \rightarrow A$$

Selbstimplikation

$$\neg A \vee A$$

Tertium non datur

$$A \rightarrow (B \rightarrow A)$$

Abschwächung

$$0 \rightarrow A$$

Ex falso quodlibet

$$(A \wedge (A \rightarrow B)) \rightarrow B$$

Modus Ponens

$$A \wedge A \leftrightarrow A$$

Idempotenz

$$(\neg\neg A) \leftrightarrow A$$

Doppelnegation

$$A \wedge (A \vee B) \leftrightarrow A$$

Absorption

$$(A \leftrightarrow B) \leftrightarrow ((A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A))$$

Äquivalenz/Implikation

$$A \wedge (B \vee C) \leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$$

Distributivität

$$A \vee (B \wedge C) \leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$$

Distributivität

Beispiele allgemeingültiger Formeln (Forts.)

$$(A \rightarrow B) \leftrightarrow (\neg B \rightarrow \neg A) \quad \text{Kontraposition}$$

$$(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \leftrightarrow$$

$$((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C)) \quad \text{Verteilen}$$

$$\neg(A \vee B) \leftrightarrow \neg A \wedge \neg B \quad \text{De Morgan}$$

$$\neg(A \wedge B) \leftrightarrow \neg A \vee \neg B \quad \text{De Morgan}$$

Theorem

► *A erfüllbar gdw $\neg A$ nicht allgemeingültig*

Theorem

- ▶ *A erfüllbar gdw $\neg A$ nicht allgemeingültig*
- ▶ *$\models A$ gdw A ist allgemeingültig*

Theorem

- ▶ A erfüllbar gdw $\neg A$ nicht allgemeingültig
- ▶ $\models A$ gdw A ist allgemeingültig
- ▶ $\models \neg A$ gdw A ist unerfüllbar

Theorem

- ▶ A erfüllbar gdw $\neg A$ nicht allgemeingültig
- ▶ $\models A$ gdw A ist allgemeingültig
- ▶ $\models \neg A$ gdw A ist unerfüllbar
- ▶ $A \models B$ gdw $\models A \rightarrow B$

Theorem

- ▶ A erfüllbar gdw $\neg A$ nicht allgemeingültig
- ▶ $\models A$ gdw A ist allgemeingültig
- ▶ $\models \neg A$ gdw A ist unerfüllbar
- ▶ $A \models B$ gdw $\models A \rightarrow B$
- ▶ $M \cup \{A\} \models B$ gdw $M \models A \rightarrow B$

Theorem

- ▶ A erfüllbar gdw $\neg A$ nicht allgemeingültig
- ▶ $\models A$ gdw A ist allgemeingültig
- ▶ $\models \neg A$ gdw A ist unerfüllbar
- ▶ $A \models B$ gdw $\models A \rightarrow B$
- ▶ $M \cup \{A\} \models B$ gdw $M \models A \rightarrow B$
- ▶ A, B sind logisch äquivalent gdw
 $A \leftrightarrow B$ ist allgemeingültig

Theorem

Wenn

- ▶ *A und B logisch äquivalent*
- ▶ *A Unterformel von C*
- ▶ *C' entsteht aus C dadurch, dass A durch B ersetzt wird*

dann

- ▶ *C und C' logisch äquivalent*

Quiz

Welche der folgenden Formeln sind Tautologien?

$$1 \quad (A \rightarrow B) \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)$$

Quiz

Welche der folgenden Formeln sind Tautologien?

1 $(A \rightarrow B) \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)$

2 $\neg(A \rightarrow B) \leftrightarrow (A \wedge \neg B)$

Quiz

Welche der folgenden Formeln sind Tautologien?

- 1 $(A \rightarrow B) \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)$
- 2 $\neg(A \rightarrow B) \leftrightarrow (A \wedge \neg B)$
- 3 $\neg(A \vee B) \rightarrow (A \vee B)$

Quiz

Welche der folgenden Formeln sind Tautologien?

1 $(A \rightarrow B) \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)$

2 $\neg(A \rightarrow B) \leftrightarrow (A \wedge \neg B)$

3 $\neg(A \vee B) \rightarrow (A \vee B)$

4 $(A \rightarrow B) \rightarrow (\neg A \rightarrow \neg B)$

Welche der folgenden Formeln sind Tautologien?

- 1 $(A \rightarrow B) \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)$
- 2 $\neg(A \rightarrow B) \leftrightarrow (A \wedge \neg B)$
- 3 $\neg(A \vee B) \rightarrow (A \vee B)$
- 4 $(A \rightarrow B) \rightarrow (\neg A \rightarrow \neg B)$
- 5 $(\neg A \vee B) \vee (A \wedge \neg B)$

Quiz

Welche der folgenden Formeln sind Tautologien?

- 1 $(A \rightarrow B) \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)$ *ja*
- 2 $\neg(A \rightarrow B) \leftrightarrow (A \wedge \neg B)$ *ja*
- 3 $\neg(A \vee B) \rightarrow (A \vee B)$ *nein*
- 4 $(A \rightarrow B) \rightarrow (\neg A \rightarrow \neg B)$ *nein*
- 5 $(\neg A \vee B) \vee (A \wedge \neg B)$ *ja*

Definition

1. Eine Funktion f von $\{\mathbf{W}, \mathbf{F}\}^n$ nach $\{\mathbf{W}, \mathbf{F}\}$ für $n \in \mathbb{N}$ heißt eine n -stellige *Boolesche Funktion*.

Definition

1. Eine Funktion f von $\{\mathbf{W}, \mathbf{F}\}^n$ nach $\{\mathbf{W}, \mathbf{F}\}$ für $n \in \mathbb{N}$ heißt eine n -stellige *Boolesche Funktion*.
2. Sei $A \in \text{For}_0\Sigma$, $\Sigma = \{P_1, \dots, P_n\}$ dann wird die *Boolesche Funktion* f_A von A definiert durch:

$$f_A(\bar{b}) = \text{val}_I(A)$$

wobei $\bar{b} \in \{\mathbf{W}, \mathbf{F}\}^n$ und $I(P_i) = b_i$.

Definition

1. Eine Funktion f von $\{\mathbf{W}, \mathbf{F}\}^n$ nach $\{\mathbf{W}, \mathbf{F}\}$ für $n \in \mathbb{N}$ heißt eine n -stellige *Boolesche Funktion*.
2. Sei $A \in \text{For}_0\Sigma$, $\Sigma = \{P_1, \dots, P_n\}$ dann wird die *Boolesche Funktion* f_A von A definiert durch:

$$f_A(\bar{b}) = \text{val}_I(A)$$

wobei $\bar{b} \in \{\mathbf{W}, \mathbf{F}\}^n$ und $I(P_i) = b_i$.

Die Boolesche Funktion f_A hängt ab von der Anordnung der in ihr vorkommenden aussagenlogischen Atome!

Für $A = P_1 \wedge P_3$ in der Signatur $\Sigma = \{P_1, P_2, P_3\}$ ergibt sich f_A aus der folgenden Tabelle:

P_1	P_2	P_3	$f_A(P_1, P_2, P_3)$
W	W	W	W
W	W	F	F
W	F	W	W
W	F	F	F
F	W	W	F
F	W	F	F
F	F	W	F
F	F	F	F

Satz

Zu jeder Booleschen Funktion $f : \{\mathbf{W}, \mathbf{F}\}^n \rightarrow \{\mathbf{W}, \mathbf{F}\}$ gibt es eine Formel $A \in For0_\Sigma$ mit

$$f = f_A$$

Satz

Zu jeder Booleschen Funktion $f : \{\mathbf{W}, \mathbf{F}\}^n \rightarrow \{\mathbf{W}, \mathbf{F}\}$ gibt es eine Formel $A \in For0_\Sigma$ mit

$$f = f_A$$

Beweis:

Satz

Zu jeder Booleschen Funktion $f : \{\mathbf{W}, \mathbf{F}\}^n \rightarrow \{\mathbf{W}, \mathbf{F}\}$ gibt es eine Formel $A \in \text{For}_{0\Sigma}$ mit

$$f = f_A$$

Beweis: Seien $\bar{b}_1, \dots, \bar{b}_k$ genau die n -Tupel aus $\{\mathbf{W}, \mathbf{F}\}^n$ mit $f(\bar{b}_i) = \mathbf{W}$.

Satz

Zu jeder Booleschen Funktion $f : \{\mathbf{W}, \mathbf{F}\}^n \rightarrow \{\mathbf{W}, \mathbf{F}\}$ gibt es eine Formel $A \in For0_\Sigma$ mit

$$f = f_A$$

Beweis: Seien $\bar{b}_1, \dots, \bar{b}_k$ genau die n -Tupel aus $\{\mathbf{W}, \mathbf{F}\}^n$ mit $f(\bar{b}_i) = \mathbf{W}$.

$$A = A_1 \vee \dots \vee A_k,$$

Funktionale Vollständigkeit

Wiederholung

Satz

Zu jeder Booleschen Funktion $f : \{\mathbf{W}, \mathbf{F}\}^n \rightarrow \{\mathbf{W}, \mathbf{F}\}$ gibt es eine Formel $A \in \text{For}_{0\Sigma}$ mit

$$f = f_A$$

Beweis: Seien $\bar{b}_1, \dots, \bar{b}_k$ genau die n -Tupel aus $\{\mathbf{W}, \mathbf{F}\}^n$ mit $f(\bar{b}_i) = \mathbf{W}$.

$A = A_1 \vee \dots \vee A_k$, $A_i = A_{i,1} \wedge \dots \wedge A_{i,n}$ mit

Funktionale Vollständigkeit

Wiederholung

Satz

Zu jeder Booleschen Funktion $f : \{\mathbf{W}, \mathbf{F}\}^n \rightarrow \{\mathbf{W}, \mathbf{F}\}$ gibt es eine Formel $A \in \text{For}_{0\Sigma}$ mit

$$f = f_A$$

Beweis: Seien $\bar{b}_1, \dots, \bar{b}_k$ genau die n -Tupel aus $\{\mathbf{W}, \mathbf{F}\}^n$ mit $f(\bar{b}_i) = \mathbf{W}$.

$A = A_1 \vee \dots \vee A_k$, $A_i = A_{i,1} \wedge \dots \wedge A_{i,n}$ mit

$$A_{i,j} = \begin{cases} P_j & \text{falls } b_{i,j} = \mathbf{W} \\ \neg P_j & \text{falls } b_{i,j} = \mathbf{F} \end{cases}$$

Definition

Eine Menge KOp von aussagenlogischen Konstanten und Operatoren heißt eine

Basis,

wenn für jede Boolesche Funktion $f : \{\mathbf{W}, \mathbf{F}\}^n \rightarrow \{\mathbf{W}, \mathbf{F}\}$ eine Formel A existiert, die nur mit Konstanten und Operatoren aus KOp aufgebaut ist, mit

$$f_A = f.$$

Definition

Eine Menge KOp von aussagenlogischen Konstanten und Operatoren heißt eine

Basis,

wenn für jede Boolesche Funktion $f : \{\mathbf{W}, \mathbf{F}\}^n \rightarrow \{\mathbf{W}, \mathbf{F}\}$ eine Formel A existiert, die nur mit Konstanten und Operatoren aus KOp aufgebaut ist, mit

$$f_A = f.$$

Keine Minimalität für KOp gefordert.

Beispiele

- ▶ $\{1, 0, \neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$
- ▶ $\{\neg, \wedge\}$
- ▶ $\{0, \rightarrow\}$
- ▶ $\{\downarrow\}$
- ▶ $\{1, 0, sh\}$

wobei $A \downarrow B = \neg(A \vee B)$:

$val_I(A)$	$val_I(B)$	$val_I(A \downarrow B)$
W	W	F
W	F	F
F	W	F
F	F	W