

Formale Systeme

Prof. Dr. Bernhard Beckert, WS 2015/2016

Das Erfüllbarkeitsproblem

KIT – INSTITUT FÜR THEORETISCHE INFORMATIK

Das SAT Problem

oder Erfüllbarkeitsproblem

SAT

Instanz: Eine aussagenlogische Formel $F \in \text{For0}$

Frage: Ist F erfüllbar?

Gibt es eine Interpretation I mit $\text{val}_I(F) = \mathbf{W}$?

Das SAT Problem

oder Erfüllbarkeitsproblem

SAT

Instanz: Eine aussagenlogische Formel $F \in \text{For}_0$

Frage: Ist F erfüllbar?

Gibt es eine Interpretation I mit $\text{val}_I(F) = \mathbf{W}$?

SAT ist ein *NP-vollständiges* Problem:

Das SAT Problem

oder Erfüllbarkeitsproblem

SAT

Instanz: Eine aussagenlogische Formel $F \in \text{For}_0$

Frage: Ist F erfüllbar?

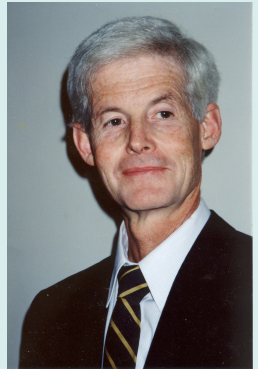
Gibt es eine Interpretation I mit $\text{val}_I(F) = \mathbf{W}$?

SAT ist ein *NP-vollständiges* Problem:

Gäbe es einen (deterministischen) polynomiellen Entscheidungsalgorithmus für die Erfüllbarkeit, dann wäre $NP = P$, d.h. jedes nichtdeterministisch-polynomielle Entscheidungsproblem auch deterministisch-polynomiell.

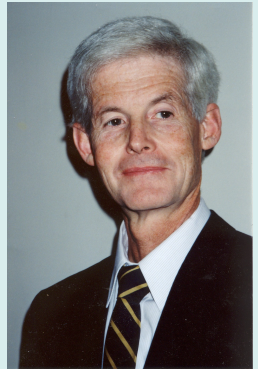
Stephen A. Cook ★ 1939

- Informatik-Professor an der Universität Toronto



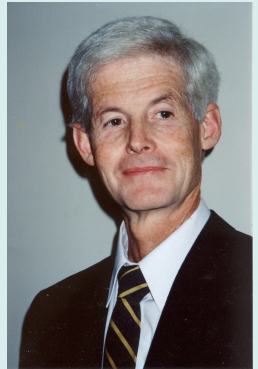
Stephen A. Cook ★ 1939

- ▶ Informatik-Professor an der Universität Toronto
- ▶ 1971: „Das Erfüllbarkeitsproblem der Aussagenlogik (SAT) ist NP-vollständig“



Stephen A. Cook ★ 1939

- ▶ Informatik-Professor an der Universität Toronto
- ▶ 1971: „Das Erfüllbarkeitsproblem der Aussagenlogik (SAT) ist NP-vollständig“
- ▶ **Turing-Preisträger**



Das Erfüllbarkeitsproblem für Formeln

- ▶ in KNF ist NP-vollständig

Das Erfüllbarkeitsproblem für Formeln

- ▶ in KNF ist NP-vollständig
- ▶ in 3-KNF ist NP-vollständig

Das Erfüllbarkeitsproblem für Formeln

- ▶ in KNF ist NP-vollständig
- ▶ in 3-KNF ist NP-vollständig
- ▶ in 2-KNF ist polynomiell entscheidbar

Das Erfüllbarkeitsproblem für Formeln

- ▶ in KNF ist NP-vollständig
- ▶ in 3-KNF ist NP-vollständig
- ▶ in 2-KNF ist polynomiell entscheidbar
- ▶ in DNF ist polynomiell entscheidbar ($O(n \log n)$)

Das Erfüllbarkeitsproblem für Formeln

- ▶ in KNF ist NP-vollständig
- ▶ in 3-KNF ist NP-vollständig
- ▶ in 2-KNF ist polynomiell entscheidbar
- ▶ in DNF ist polynomiell entscheidbar ($O(n \log n)$)
- ▶ für Horn-Formeln ist polynomiell entscheidbar ($O(n^2)$)

Das Erfüllbarkeitsproblem für Formeln

- ▶ in KNF ist NP-vollständig
- ▶ in 3-KNF ist NP-vollständig
- ▶ in 2-KNF ist polynomiell entscheidbar
- ▶ in DNF ist polynomiell entscheidbar ($O(n \log n)$)
- ▶ für Horn-Formeln ist polynomiell entscheidbar ($O(n^2)$)

Das Erfüllbarkeitsproblem für Formeln

- ▶ in KNF ist NP-vollständig
- ▶ in 3-KNF ist NP-vollständig
- ▶ in 2-KNF ist polynomiell entscheidbar
- ▶ in DNF ist polynomiell entscheidbar ($O(n \log n)$)
- ▶ für Horn-Formeln ist polynomiell entscheidbar ($O(n^2)$)

Bemerkungen:

- ▶ k -KNF-Formeln sind Konjunktionen von Disjunktionen mit höchstens k Literalen.

Das Erfüllbarkeitsproblem für Formeln

- ▶ in KNF ist NP-vollständig
- ▶ in 3-KNF ist NP-vollständig
- ▶ in 2-KNF ist polynomiell entscheidbar
- ▶ in DNF ist polynomiell entscheidbar ($O(n \log n)$)
- ▶ für Horn-Formeln ist polynomiell entscheidbar ($O(n^2)$)

Bemerkungen:

- ▶ k -KNF-Formeln sind Konjunktionen von Disjunktionen mit höchstens k Literalen.
- ▶ 2-KNF-Formeln heißen auch Krom-Formeln.

Horn-Formeln

Wichtigste Teilklasse mit nicht NP-vollständigem
Erfüllbarkeitsproblem

Horn-Formeln

Wichtigste Teilklasse mit nicht NP-vollständigem Erfüllbarkeitsproblem

Definition

Eine aussagenlogische Formel A ist eine *Horn-Formel*, wenn

- ▶ A in KNF ist,
- ▶ jede Disjunktion in A höchstens ein positives Literal enthält

Horn-Formeln

Wichtigste Teilklasse mit nicht NP-vollständigem Erfüllbarkeitsproblem

Definition

Eine aussagenlogische Formel A ist eine *Horn-Formel*, wenn

- ▶ A in KNF ist,
- ▶ jede Disjunktion in A höchstens ein positives Literal enthält

Alternative Schreibweise:

$\neg B_1 \vee \dots \vee \neg B_m \vee A$	$B_1 \wedge \dots \wedge B_m \rightarrow A$
$\neg B_1 \vee \dots \vee \neg B_m$	$B_1 \wedge \dots \wedge B_m \rightarrow \mathbf{0}$
A	A
leere Disjunktion	$\square$

Horn-Formeln

Wichtigste Teilklasse mit nicht NP-vollständigem Erfüllbarkeitsproblem

Definition

Eine aussagenlogische Formel A ist eine *Horn-Formel*, wenn

- ▶ A in KNF ist,
- ▶ jede Disjunktion in A höchstens ein positives Literal enthält

Alternative Schreibweise:

$\neg B_1 \vee \dots \vee \neg B_m \vee A$	$B_1 \wedge \dots \wedge B_m \rightarrow A$
$\neg B_1 \vee \dots \vee \neg B_m$	$B_1 \wedge \dots \wedge B_m \rightarrow \mathbf{0}$
A	A
leere Disjunktion	$\square$

Bezeichnungen:

$B_1 \wedge \dots \wedge B_m$: „Rumpf“ A : „Kopf“ (bei leerem Rumpf: „Fakt“)

Beispiel einer Horn-Formel

$$\begin{aligned} & \neg P \\ \wedge & (Q \vee \neg R \vee \neg S) \\ \wedge & (\neg Q \vee \neg S) \\ \wedge & R \\ \wedge & S \\ \wedge & (\neg Q \vee P) \end{aligned}$$

Alternative Schreibweise

$$\begin{aligned} & (P \rightarrow \mathbf{0}) \\ \wedge & (R \wedge S \rightarrow Q) \\ \wedge & (Q \wedge S \rightarrow \mathbf{0}) \\ \wedge & R \\ \wedge & S \\ \wedge & (Q \rightarrow P) \end{aligned}$$

Erfüllbarkeitsproblem für Horn-Formeln

Theorem

Für Horn-Formeln ist die Erfüllbarkeit in quadratischer Zeit entscheidbar.

Sei $C = D_1 \wedge \dots \wedge D_m$ eine Hornformel.

Ein Atom in C *markieren*, bedeutet, es an allen Stellen seines Auftretens in C zu markieren.

Erfüllbarkeitstest

Sei $C = D_1 \wedge \dots \wedge D_m$ eine Hornformel.

Ein Atom in C *markieren*, bedeutet, es an allen Stellen seines Auftretens in C zu markieren.

- 0: Falls keine Fakten existieren: Ausgabe „erfüllbar“. STOP.
Andernfalls: Markiere alle Fakten.

Erfüllbarkeitstest

Sei $C = D_1 \wedge \dots \wedge D_m$ eine Hornformel.

Ein Atom in C *markieren*, bedeutet, es an allen Stellen seines Auftretens in C zu markieren.

- 0: Falls keine Fakten existieren: Ausgabe „erfüllbar“. STOP.
Andernfalls: Markiere alle Fakten.
- 1: Falls kein $B_1 \wedge \dots \wedge B_m \rightarrow K$ existiert, so dass alle B_i im Rumpf markiert sind: Ausgabe „erfüllbar“. STOP.

Erfüllbarkeitstest

Sei $C = D_1 \wedge \dots \wedge D_m$ eine Hornformel.

Ein Atom in C *markieren*, bedeutet, es an allen Stellen seines Auftretens in C zu markieren.

0: Falls keine Fakten existieren: Ausgabe „erfüllbar“. STOP.
Andernfalls: Markiere alle Fakten.

1: Falls kein $B_1 \wedge \dots \wedge B_m \rightarrow K$ existiert, so dass alle B_i im Rumpf markiert sind: Ausgabe „erfüllbar“. STOP.

Falls ein $B_1 \wedge \dots \wedge B_m \rightarrow \mathbf{0}$ existiert mit Kopf $\mathbf{0}$, so dass alle Atome B_i im Rumpf markiert sind:
Ausgabe „unerfüllbar“. STOP.

Erfüllbarkeitstest

Sei $C = D_1 \wedge \dots \wedge D_m$ eine Hornformel.

Ein Atom in C *markieren*, bedeutet, es an allen Stellen seines Auftretens in C zu markieren.

0: Falls keine Fakten existieren: Ausgabe „erfüllbar“. STOP.
Andernfalls: Markiere alle Fakten.

1: Falls kein $B_1 \wedge \dots \wedge B_m \rightarrow K$ existiert, so dass alle B_i im Rumpf markiert sind: Ausgabe „erfüllbar“. STOP.

Falls ein $B_1 \wedge \dots \wedge B_m \rightarrow \mathbf{0}$ existiert mit Kopf $\mathbf{0}$, so dass alle Atome B_i im Rumpf markiert sind:
Ausgabe „unerfüllbar“. STOP.

Falls ein $B_1 \wedge \dots \wedge B_m \rightarrow A$ existiert, so dass alle Atome B_i im Rumpf markiert sind aber der Kopf A nicht:
Markiere A . Gehe zu 1.

Erfüllbarkeitstest

Sei $C = D_1 \wedge \dots \wedge D_m$ eine Hornformel.

Ein Atom in C *markieren*, bedeutet, es an allen Stellen seines Auftretens in C zu markieren.

0: Falls keine Fakten existieren: Ausgabe „erfüllbar“. STOP.
Andernfalls: Markiere alle Fakten.

1: Falls kein $B_1 \wedge \dots \wedge B_m \rightarrow K$ existiert, so dass alle B_i im Rumpf markiert sind: Ausgabe „erfüllbar“. STOP.

Falls ein $B_1 \wedge \dots \wedge B_m \rightarrow \mathbf{0}$ existiert mit Kopf $\mathbf{0}$, so dass alle Atome B_i im Rumpf markiert sind:
Ausgabe „unerfüllbar“. STOP.

Falls ein $B_1 \wedge \dots \wedge B_m \rightarrow A$ existiert, so dass alle Atome B_i im Rumpf markiert sind aber der Kopf A nicht:
Markiere A . Gehe zu 1.

Andernfalls: Ausgabe „erfüllbar“. STOP.

Beispiel

$\textcircled{p}$

$\textcircled{q}$

$\textcircled{q} \wedge \textcircled{r} \rightarrow \textcircled{s}$

$\textcircled{p} \rightarrow \textcircled{r}$

$\textcircled{s} \rightarrow \textcircled{0}$

Beispiel

p

q

$(q) \wedge (r) \rightarrow (s)$

$(p) \rightarrow (r)$

$(s) \rightarrow (0)$

Beispiel

p

q

q $\wedge$ **r** $\rightarrow$ **s**

p $\rightarrow$ **r**

s $\rightarrow$ **0**

Beispiel

p

q

q $\wedge$ **r** $\rightarrow$ **s**

p $\rightarrow$ **r**

s $\rightarrow$ **0**

Beispiel

p

q

$q \wedge r \rightarrow s$

$p \rightarrow r$

$s \rightarrow 0$

Beispiel

p

q

$q \wedge r \rightarrow s$

$p \rightarrow r$

$s \rightarrow 0$

Beispiel

p

q

$q \wedge r \rightarrow s$

$p \rightarrow r$

$s \rightarrow 0$

Beispiel

p

q

$q \wedge r \rightarrow s$

$p \rightarrow r$

$s \rightarrow 0$

Formelmengen nicht erfüllbar

Davis-Putnam-Logemann-Loveland-Verfahren

DPLL-Verfahren

Wichtigstes Verfahren zur Entscheidung des allgemeinen Erfüllbarkeitsproblems (SAT-Problem)

DPLL-Verfahren

Wichtigstes Verfahren zur Entscheidung des allgemeinen Erfüllbarkeitsproblems (SAT-Problem)

Das zur Zeit schnellste und fast ausschließlich benutzte Verfahren

DPLL-Verfahren

Wichtigstes Verfahren zur Entscheidung des allgemeinen Erfüllbarkeitsproblems (SAT-Problem)

Das zur Zeit schnellste und fast ausschließlich benutzte Verfahren

Eingabe: Formel in KNF

In Disjunktionen und Konjunktionen
kommt es nicht auf

- ▶ die Reihenfolge der Teilformeln an

In Disjunktionen und Konjunktionen
kommt es nicht auf

- ▶ die Reihenfolge der Teilformeln an
- ▶ die Multiplizität identischer Teilformeln an

In Disjunktionen und Konjunktionen
kommt es nicht auf

- ▶ die Reihenfolge der Teilformeln an
- ▶ die Multiplizität identischer Teilformeln an

In Disjunktionen und Konjunktionen
kommt es nicht auf

- ▶ die Reihenfolge der Teilformeln an
- ▶ die Multiplizität identischer Teilformeln an

Mengenschreibweise

In Disjunktionen und Konjunktionen
kommt es nicht auf

- ▶ die Reihenfolge der Teilformeln an
- ▶ die Multiplizität identischer Teilformeln an

Mengenschreibweise

Disjunktion als Menge: „Klausel“

KNF-Formel als Menge: „Klauselmenge“

Exkurs: Klauselschreibweise

In Disjunktionen und Konjunktionen kommt es nicht auf

- ▶ die Reihenfolge der Teilformeln an
- ▶ die Multiplizität identischer Teilformeln an

Mengenschreibweise

Disjunktion als Menge: „Klausel“

KNF-Formel als Menge: „Klauselmenge“

Schreibweise:

- ☐ für die leere Klausel

Exkurs: Klauselschreibweise

In Disjunktionen und Konjunktionen kommt es nicht auf

- ▶ die Reihenfolge der Teilformeln an
- ▶ die Multiplizität identischer Teilformeln an

Mengenschreibweise

Disjunktion als Menge: „Klausel“

KNF-Formel als Menge: „Klauselmenge“

Schreibweise:

- $\square$ für die leere Klausel
- $\emptyset$ für die leere Klauselmenge

Semantik

/ Interpretation, S Menge von Klauseln, C Klausel.

Semantik

/ Interpretation, S Menge von Klauseln, C Klausel.

$$1. \text{val}_I(S) = \begin{cases} \mathbf{W} & \text{falls für alle } C \in S \text{ gilt: } \text{val}_I(C) = \mathbf{W} \\ \mathbf{F} & \text{sonst} \end{cases}$$

Semantik

I Interpretation, S Menge von Klauseln, C Klausel.

$$1. \text{val}_I(S) = \begin{cases} \mathbf{W} & \text{falls f\"ur alle } C \in S \text{ gilt: } \text{val}_I(C) = \mathbf{W} \\ \mathbf{F} & \text{sonst} \end{cases}$$

$$2. \text{val}_I(C) = \begin{cases} \mathbf{W} & \text{falls ein } L \in C \text{ existiert mit } \text{val}_I(L) = \mathbf{W} \\ \mathbf{F} & \text{sonst} \end{cases}$$

Semantik

I Interpretation, S Menge von Klauseln, C Klausel.

- $val_I(S) = \begin{cases} \mathbf{W} & \text{falls f\"ur alle } C \in S \text{ gilt: } val_I(C) = \mathbf{W} \\ \mathbf{F} & \text{sonst} \end{cases}$
- $val_I(C) = \begin{cases} \mathbf{W} & \text{falls ein } L \in C \text{ existiert mit } val_I(L) = \mathbf{W} \\ \mathbf{F} & \text{sonst} \end{cases}$
- $I(\emptyset) = \mathbf{W}.$

Semantik

I Interpretation, S Menge von Klauseln, C Klausel.

1. $val_I(S) = \begin{cases} \mathbf{W} & \text{falls für alle } C \in S \text{ gilt: } val_I(C) = \mathbf{W} \\ \mathbf{F} & \text{sonst} \end{cases}$
2. $val_I(C) = \begin{cases} \mathbf{W} & \text{falls ein } L \in C \text{ existiert mit } val_I(L) = \mathbf{W} \\ \mathbf{F} & \text{sonst} \end{cases}$
3. $I(\emptyset) = \mathbf{W}$.
4. $I(\square) = \mathbf{F}$.

procedure DPLL(Klauselmenge S)

- 1 **if** $S = \emptyset$ **then return** 1;
- 2 **if** $\square \in S$ **then return** 0;
- 3 **if** S enthält Einerklausel
- 4 **then choose** Einerklausel $\{L\} \in S$;
- 5 **return** DPLL($\text{red}_{\{L\}}(S)$);
- 6 **else choose** $P \in \text{atom}(S)$
- 7 **return** $\max\{\text{DPLL}(S_P), \text{DPLL}(S_{\neg P})\}$;

procedure DPLL(Klauselmenge S)

```
1  if  $S = \emptyset$  then return 1;  
2  if  $\square \in S$  then return 0;  
3  if  $S$  enthält Einerklausel  
4    then choose Einerklausel  $\{L\} \in S$ ;  
5    return DPLL( $\text{red}_{\{L\}}(S)$ );  
6  else choose  $P \in \text{atom}(S)$   
7    return  $\max\{\text{DPLL}(S_P), \text{DPLL}(S_{\neg P})\}$ ;
```

- $\text{atom}(S) = \bigcup_{C \in S} \text{atom}(C)$,
wobei $\text{atom}(C) = \{P \in \Sigma \mid P \in C \text{ oder } \neg P \in C\}$

procedure DPLL(Klauselmenge S)

```
1  if  $S = \emptyset$  then return 1;  
2  if  $\square \in S$  then return 0;  
3  if  $S$  enthält Einerklausel  
4    then choose Einerklausel  $\{L\} \in S$ ;  
5    return DPLL( $\text{red}_{\{L\}}(S)$ );  
6  else choose  $P \in \text{atom}(S)$   
7    return  $\max\{\text{DPLL}(S_P), \text{DPLL}(S_{\neg P})\}$ ;
```

► $\text{atom}(S) = \bigcup_{C \in S} \text{atom}(C)$,
wobei $\text{atom}(C) = \{P \in \Sigma \mid P \in C \text{ oder } \neg P \in C\}$

► $\text{red}_{\{L\}}(S) = \{\text{red}_{\{L\}}(C) \mid C \in S \text{ mit } L \notin C\}$

$\text{red}_{\{L\}}(C) = C \setminus \{\bar{L}\}$, wobei $\bar{A} = \neg A$ und $\overline{\neg A} = A$ für $A \in \Sigma$

procedure DPLL(Klauselm Menge S)

```
1  if  $S = \emptyset$  then return 1;  
2  if  $\square \in S$  then return 0;  
3  if  $S$  enthält Einerklausel  
4    then choose Einerklausel  $\{L\} \in S$ ;  
5    return DPLL( $\text{red}_{\{L\}}(S)$ );  
6  else choose  $P \in \text{atom}(S)$   
7    return  $\max\{\text{DPLL}(S_P), \text{DPLL}(S_{\neg P})\}$ ;
```

- ▶ $\text{atom}(S) = \bigcup_{C \in S} \text{atom}(C)$,
wobei $\text{atom}(C) = \{P \in \Sigma \mid P \in C \text{ oder } \neg P \in C\}$
- ▶ $\text{red}_{\{L\}}(S) = \{\text{red}_{\{L\}}(C) \mid C \in S \text{ mit } L \notin C\}$
 $\text{red}_{\{L\}}(C) = C \setminus \{\bar{L}\}$, wobei $\bar{A} = \neg A$ und $\overline{\neg A} = A$ für $A \in \Sigma$
- ▶ $S_P = S \cup \{\{P\}\}$ und $S_{\neg P} = S \cup \{\{\neg P\}\}$.

Wir beginnen mit der Klauselmengen S

$$\begin{array}{ll} P_1 \vee P_2 \vee P_3 & \neg P_1 \vee P_2 \vee \neg P_4 \\ \neg P_1 \vee P_3 & \neg P_1 \vee \neg P_3 \vee P_4 \\ P_1 \vee \neg P_3 & \neg P_2 \end{array}$$

Wir beginnen mit der Klauselmenge S

$$\begin{array}{ll} P_1 \vee P_2 \vee P_3 & \neg P_1 \vee P_2 \vee \neg P_4 \\ \neg P_1 \vee P_3 & \neg P_1 \vee \neg P_3 \vee P_4 \\ P_1 \vee \neg P_3 & \neg P_2 \end{array}$$

Beim ersten Aufruf von $\text{DPLL}(S)$ wird das Unterprogramm $\text{red}_{\{\neg P_2\}}(S)$ aufgerufen.

Wir beginnen mit der Klauselmengen S

$$\begin{array}{ll} P_1 \vee P_2 \vee P_3 & \neg P_1 \vee P_2 \vee \neg P_4 \\ \neg P_1 \vee P_3 & \neg P_1 \vee \neg P_3 \vee P_4 \\ P_1 \vee \neg P_3 & \neg P_2 \end{array}$$

Beim ersten Aufruf von $\text{DPLL}(S)$ wird das Unterprogramm $\text{red}_{\{\neg P_2\}}(S)$ aufgerufen und liefert S_1 :

$$\begin{array}{ll} P_1 \vee P_3 & \neg P_1 \vee \neg P_4 \\ \neg P_1 \vee P_3 & \neg P_1 \vee \neg P_3 \vee P_4 \\ P_1 \vee \neg P_3 & \end{array}$$

rot	=	ganze Klausel entfernt
dunkelgrün	=	Literal aus Klausel entfernt
blau	=	unverändert

$$\begin{array}{ll} P_1 \vee P_3 & \neg P_1 \vee \neg P_4 \\ \neg P_1 \vee P_3 & \neg P_1 \vee \neg P_3 \vee P_4 \\ P_1 \vee \neg P_3 & \end{array}$$

S_1 enthält keine Einerklausel.

$$\begin{array}{l} P_1 \vee P_3 \quad \neg P_1 \vee \neg P_4 \\ \neg P_1 \vee P_3 \quad \neg P_1 \vee \neg P_3 \vee P_4 \\ P_1 \vee \neg P_3 \end{array}$$

S_1 enthält keine Einerklausel. Die Variable P_1 wird gewählt und $\text{DPLL}(S_{1,0})$ und $\text{DPLL}(S_{1,1})$ werden aufgerufen.

$S_{1,0}$:

$$P_1 \vee P_3$$

$$\neg P_1 \vee \neg P_4$$

$$\neg P_1 \vee P_3$$

$$\neg P_1 \vee \neg P_3 \vee P_4$$

$$P_1 \vee \neg P_3$$

$$P_1$$

$S_{1,1}$:

$$P_1 \vee P_3$$

$$\neg P_1 \vee \neg P_4$$

$$\neg P_1 \vee P_3$$

$$\neg P_1 \vee \neg P_3 \vee P_4$$

$$P_1 \vee \neg P_3$$

$$\neg P_1$$

$$\begin{aligned} S_{1,0} : \\ & P_1 \vee P_3 \\ & \neg P_1 \vee \neg P_4 \\ & \neg P_1 \vee P_3 \\ & \neg P_1 \vee \neg P_3 \vee P_4 \\ & P_1 \vee \neg P_3 \\ & P_1 \end{aligned}$$

$$red_{\{P_1\}}(S_{1,0})$$

$S_{1,0} :$

$P_1 \vee P_3$

$\neg P_1 \vee \neg P_4$

$\neg P_1 \vee P_3$

$\neg P_1 \vee \neg P_3 \vee P_4$

$P_1 \vee \neg P_3$

P_1

$red_{\{P_1\}}(S_{1,0})$: Die **Klauseln** werden gestrichen.
Das **Literal** wird entfernt.

$$\begin{aligned} red_{\{P_1\}}(S_{1,0}) &= S_{2,0} \\ &= \{\neg P_4, P_3, \neg P_3 \vee P_4\} \end{aligned}$$

$$S_{2,0} = \{\neg P_4, P_3, \neg P_3 \vee P_4\}$$

Der Aufruf von $red_{\{P_3\}}(S_{2,0})$ liefert

$$\{\neg P_4, P_4\}$$

$$S_{2,0} = \{\neg P_4, P_3, \neg P_3 \vee P_4\}$$

Der Aufruf von $red_{\{P_3\}}(S_{2,0})$ liefert

$$\{\neg P_4, P_4\}$$

Dann:

$$red_{\{P_4\}}(\{\neg P_4, P_4\}) = \{\square\}$$

woraus die Unerfüllbarkeit von $S_{1,0}$ folgt.

$S_{1,0} :$

$P_1 \vee P_3$

$\neg P_1 \vee \neg P_4$

$\neg P_1 \vee P_3$

$\neg P_1 \vee \neg P_3 \vee P_4$

$P_1 \vee \neg P_3$

P_1

$S_{1,1} :$

$P_1 \vee P_3$

$\neg P_1 \vee \neg P_4$

$\neg P_1 \vee P_3$

$\neg P_1 \vee \neg P_3 \vee P_4$

$P_1 \vee \neg P_3$

$\neg P_1$

Jetzt kommt die Abarbeitung von $DPLL(S_{1,1})$ an die Reihe.

$$\begin{aligned} S_{1,1} : \\ P_1 \vee P_3 \\ \neg P_1 \vee \neg P_4 \\ \neg P_1 \vee P_3 \\ \neg P_1 \vee \neg P_3 \vee P_4 \\ P_1 \vee \neg P_3 \\ \neg P_1 \end{aligned}$$

$red_{\{\neg P_1\}}(S_{1,1})$ entfernt die Klauseln, in denen $\neg P_1$ vorkommt ...

$$\begin{aligned} S_{1,1} : \\ P_1 \vee P_3 \\ P_1 \vee \neg P_3 \end{aligned}$$

... und streicht in den restlichen P_1 .

$$\begin{aligned} S_{1,1} : \\ P_1 \vee P_3 \\ P_1 \vee \neg P_3 \end{aligned}$$

... und streicht in den restlichen P_1 .
Das liefert

$$\{P_3, \neg P_3\}$$

$$\begin{aligned} S_{1,1} : \\ P_1 \vee P_3 \\ P_1 \vee \neg P_3 \end{aligned}$$

... und streicht in den restlichen P_1 .
Das liefert

$$\{P_3, \neg P_3\}$$

woraus im nächsten Schritt

$$\{\square\}$$

entsteht,

$$\begin{aligned} S_{1,1} : \\ P_1 \vee P_3 \\ P_1 \vee \neg P_3 \end{aligned}$$

... und streicht in den restlichen P_1 .
Das liefert

$$\{P_3, \neg P_3\}$$

woraus im nächsten Schritt

$$\{\square\}$$

entsteht,
woraus die Unerfüllbarkeit von $S_{1,1}$ und damit insgesamt die
Unerfüllbarkeit von S folgt.

Theorem

Theorem

1. Der DPLL Algorithmus terminiert für jede Eingabe.

Theorem

1. Der DPLL Algorithmus terminiert für jede Eingabe.
2. Der DPLL Algorithmus ist korrekt und vollständig.

Theorem

1. Der DPLL Algorithmus terminiert für jede Eingabe.
2. Der DPLL Algorithmus ist korrekt und vollständig.

Theorem

1. Der DPLL Algorithmus terminiert für jede Eingabe.
2. Der DPLL Algorithmus ist korrekt und vollständig.
 - 2.1 aus $DPLL(S) = 1$ folgt, daß S erfüllbar ist und

Theorem

1. Der DPLL Algorithmus terminiert für jede Eingabe.
2. Der DPLL Algorithmus ist korrekt und vollständig.
 - 2.1 aus $DPLL(S) = 1$ folgt, daß S erfüllbar ist und
 - 2.2 ist S erfüllbar, dann gilt $DPLL(S) = 1$.

Theorem

1. Der DPLL Algorithmus terminiert für jede Eingabe.
2. Der DPLL Algorithmus ist korrekt und vollständig.
 - 2.1 aus $DPLL(S) = 1$ folgt, daß S erfüllbar ist und
 - 2.2 ist S erfüllbar, dann gilt $DPLL(S) = 1$.

Theorem

1. Der DPLL Algorithmus terminiert für jede Eingabe.
2. Der DPLL Algorithmus ist korrekt und vollständig.
 - 2.1 aus $\text{DPLL}(S) = 1$ folgt, daß S erfüllbar ist und
 - 2.2 ist S erfüllbar, dann gilt $\text{DPLL}(S) = 1$.

Beweisidee:

Terminierung:

- Bei jeder Reduktion fällt ein Atom weg

Theorem

1. Der DPLL Algorithmus terminiert für jede Eingabe.
2. Der DPLL Algorithmus ist korrekt und vollständig.
 - 2.1 aus $\text{DPLL}(S) = 1$ folgt, daß S erfüllbar ist und
 - 2.2 ist S erfüllbar, dann gilt $\text{DPLL}(S) = 1$.

Beweisidee:

Terminierung:

- Bei jeder Reduktion fällt ein Atom weg

Theorem

1. Der DPLL Algorithmus terminiert für jede Eingabe.
2. Der DPLL Algorithmus ist korrekt und vollständig.
 - 2.1 aus $DPLL(S) = 1$ folgt, daß S erfüllbar ist und
 - 2.2 ist S erfüllbar, dann gilt $DPLL(S) = 1$.

Beweisidee:

Terminierung:

- ▶ Bei jeder Reduktion fällt ein Atom weg

Korrektheit/Vollständigkeit

- ▶ Jeder Schritt führt zu einer erfüllbarkeitsäquivalenten Klauselmenge

Theorem

1. Der DPLL Algorithmus terminiert für jede Eingabe.
2. Der DPLL Algorithmus ist korrekt und vollständig.
 - 2.1 aus $\text{DPLL}(S) = 1$ folgt, daß S erfüllbar ist und
 - 2.2 ist S erfüllbar, dann gilt $\text{DPLL}(S) = 1$.

Beweisidee:

Terminierung:

- ▶ Bei jeder Reduktion fällt ein Atom weg

Korrektheit/Vollständigkeit

- ▶ Jeder Schritt führt zu einer erfüllbarkeitsäquivalenten Klauselmenge
- ▶ $\emptyset$ ist erfüllbar

Theorem

1. Der DPLL Algorithmus terminiert für jede Eingabe.
2. Der DPLL Algorithmus ist korrekt und vollständig.
 - 2.1 aus $\text{DPLL}(S) = 1$ folgt, daß S erfüllbar ist und
 - 2.2 ist S erfüllbar, dann gilt $\text{DPLL}(S) = 1$.

Beweisidee:

Terminierung:

- ▶ Bei jeder Reduktion fällt ein Atom weg

Korrektheit/Vollständigkeit

- ▶ Jeder Schritt führt zu einer erfüllbarkeitsäquivalenten Klauselmenge
- ▶ $\emptyset$ ist erfüllbar
- ▶ $\{\square\}$ ist unerfüllbar