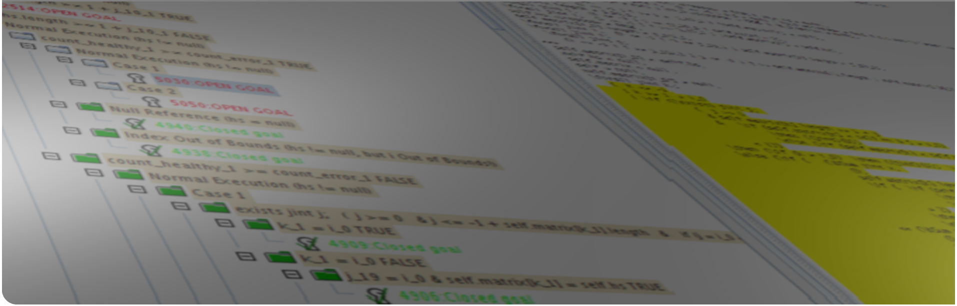
Formale Systeme

Prof. Dr. Bernhard Beckert, WS 2015/2016

Büchi-Automaten

KIT – INSTITUT FÜR THEORETISCHE INFORMATIK



Büchi-Automaten

Einführung

Unendliche Wörter

Definition

Sei V ein (weiterhin endliches) Alphabet.

Unendliche Wörter

Definition

Sei V ein (weiterhin endliches) Alphabet.

$$V^\omega$$

ist die Menge der unendlichen Wörter mit Buchstaben aus V.

Unendliche Wörter

Definition

Sei V ein (weiterhin endliches) Alphabet.

$$V^\omega$$

ist die Menge der unendlichen Wörter mit Buchstaben aus V.

$$w(n)$$

bezeichnet den n-ten Buchstaben in w und

Unendliche Wörter

Definition

Sei V ein (weiterhin endliches) Alphabet.

$$V^\omega$$

ist die Menge der unendlichen Wörter mit Buchstaben aus V.

$$w(n)$$

bezeichnet den n-ten Buchstaben in w und

$$w \downarrow (n)$$

das endliche Anfangstück $w(0) \dots w(n)$ von w.

Unendliche Wörter

Definition

Sei V ein (weiterhin endliches) Alphabet.

$$V^\omega$$

ist die Menge der unendlichen Wörter mit Buchstaben aus V.

$$w(n)$$

bezeichnet den n-ten Buchstaben in w und

$$w \downarrow (n)$$

das endliche Anfangstück $w(0) \ldots w(n)$ von w.

Ein Wort $w \in V^\omega$ heißt auch ω-Wort über V.

Unendliche Wörter

Definition

Sei V ein (weiterhin endliches) Alphabet.

$$V^\omega$$

ist die Menge der unendlichen Wörter mit Buchstaben aus V.

$$w(n)$$

bezeichnet den n-ten Buchstaben in w und

$$w \downarrow (n)$$

das endliche Anfangstück $w(0) \dots w(n)$ von w.

Ein Wort $w \in V^\omega$ heißt auch ω-Wort über V.

Man kann ein unendliches Wort $w \in V^\omega$ auch als eine Funktion $w : \mathbb{N} \rightarrow V$, von den natürlichen Zahlen in das Alphabet auffassen.

Unendliche Wörter

Definition

Sei V ein (weiterhin endliches) Alphabet.

$$V^\omega$$

ist die Menge der unendlichen Wörter mit Buchstaben aus V.

$$w(n)$$

bezeichnet den n-ten Buchstaben in w und

$$w \downarrow (n)$$

das endliche Anfangstück $w(0) \dots w(n)$ von w.

Ein Wort $w \in V^\omega$ heißt auch ω-Wort über V.

Man kann ein unendliches Wort $w \in V^\omega$ auch als eine Funktion $w : I\!N \to V$, von den natürlichen Zahlen in das Alphabet auffassen.

Das leere Wort ε kommt nicht in V^ω vor.

Operationen

auf unendlichen Wörtern

Sei $K \subseteq V^*$ und $J \subseteq V^\omega$:

1. K^ω bezeichnet die Menge der unendlichen Wörter der Form
$$w_1 \ldots w_i \ldots \text{ mit } w_i \in K \text{ für alle } i$$

Operationen

auf unendlichen Wörtern

Sei $K \subseteq V^*$ und $J \subseteq V^\omega$:

1. K^ω bezeichnet die Menge der unendlichen Wörter der Form
$$w_1 \dots w_i \dots \text{ mit } w_i \in K \text{ für alle } i$$
2. $$KJ = \{w_1 w_2 \mid w_1 \in K, w_2 \in J\}$$

Operationen

auf unendlichen Wörtern

Sei $K \subseteq V^*$ und $J \subseteq V^\omega$:

1. K^ω bezeichnet die Menge der unendlichen Wörter der Form
$$w_1 \ldots w_i \ldots \text{ mit } w_i \in K \text{ für alle } i$$
2. $$KJ = \{w_1 w_2 \mid w_1 \in K, w_2 \in J\}$$
3. $$\vec{K} = \{w \in V^\omega \mid w \downarrow (n) \in K \text{ für unendlich viele } n\}$$

Operationen

auf unendlichen Wörtern

Sei $K \subseteq V^*$ und $J \subseteq V^\omega$:

1. K^ω bezeichnet die Menge der unendlichen Wörter der Form
$$w_1 \ldots w_i \ldots \text{ mit } w_i \in K \text{ für alle } i$$
2. $$KJ = \{w_1 w_2 \mid w_1 \in K, w_2 \in J\}$$
3. $$\vec{K} = \{w \in V^\omega \mid w \downarrow (n) \in K \text{ für unendlich viele } n\}$$

Operationen

auf unendlichen Wörtern

Sei $K \subseteq V^*$ und $J \subseteq V^\omega$:

1. K^ω bezeichnet die Menge der unendlichen Wörter der Form
$$w_1 \dots w_i \dots \text{ mit } w_i \in K \text{ für alle } i$$
2. $$KJ = \{w_1 w_2 \mid w_1 \in K, w_2 \in J\}$$
3. $$\vec{K} = \{w \in V^\omega \mid w \downarrow (n) \in K \text{ für unendlich viele } n\}$$

   Manche Autoren benutzen $lim(K)$ anstelle von $\vec{K}$.

Büchi-Automaten

Definition

Sei $\mathcal{A} = (S, V, s_0, \delta, F)$ ein nicht deterministischer endlicher Automat.

Büchi-Automaten

Definition

Sei $\mathcal{A} = (S, V, s_0, \delta, F)$ ein nicht deterministischer endlicher Automat.

Für ein ω-Wort $w \in V^\omega$ nennen wir eine Folge $s_0, \ldots, s_n, \ldots$ eine *Berechnungsfolge* (Englisch *run*) für w, wenn für alle $0 \leq n$:

$$s_{n+1} \in \delta(s_n, w(n))$$

Büchi-Automaten

Definition

Sei $\mathcal{A} = (S, V, s_0, \delta, F)$ ein nicht deterministischer endlicher Automat.

Für ein ω-Wort $w \in V^\omega$ nennen wir eine Folge $s_0, \ldots, s_n, \ldots$ eine *Berechnungsfolge* (Englisch *run*) für w, wenn für alle $0 \leq n$:

$$s_{n+1} \in \delta(s_n, w(n))$$

Die von $\mathcal{A}$ akzeptierte ω-Sprache ist:

$$L^\omega(\mathcal{A}) = \{w \in V^\omega \mid \text{es gibt eine Berechnungsfolge für } w \text{ mit unendlich vielen Finalzuständen}\}$$

Büchi-Automaten

Definition

Sei $\mathcal{A} = (S, V, s_0, \delta, F)$ ein nicht deterministischer endlicher Automat.

Für ein ω-Wort $w \in V^\omega$ nennen wir eine Folge $s_0, \ldots, s_n, \ldots$ eine *Berechnungsfolge* (Englisch *run*) für w, wenn für alle $0 \leq n$:

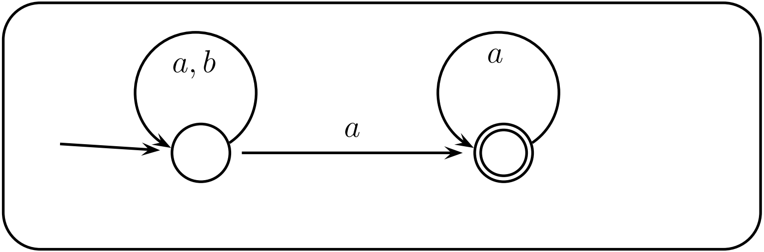
$$s_{n+1} \in \delta(s_n, w(n))$$

Die von $\mathcal{A}$ akzeptierte ω-Sprache ist:

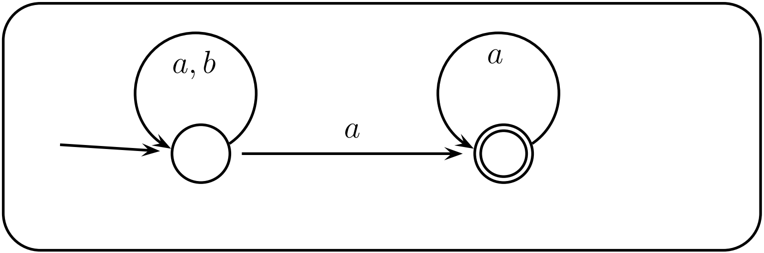
$$L^\omega(\mathcal{A}) = \{w \in V^\omega \mid \text{es gibt eine Berechnungsfolge für } w \text{ mit unendlich vielen Finalzuständen } \}$$

Der einzige Unterschied zwischen Büchi-Automaten und (normalen) endlichen Automaten liegt in der Akzeptanzdefinition.

Beispiel 1



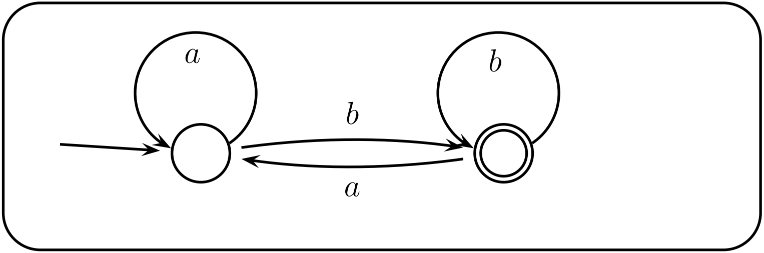
Beispiel 1



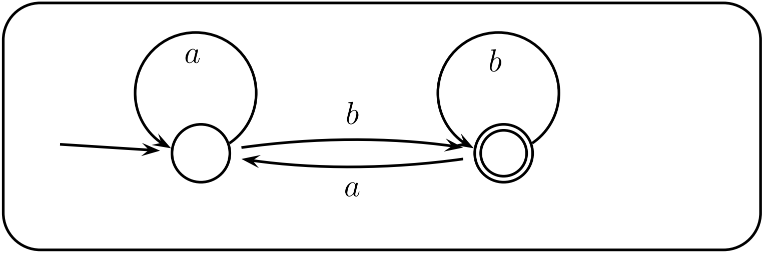
Die akzeptierte Sprache ist

$$\{a, b\}^* a^\omega$$

Beispiel 2



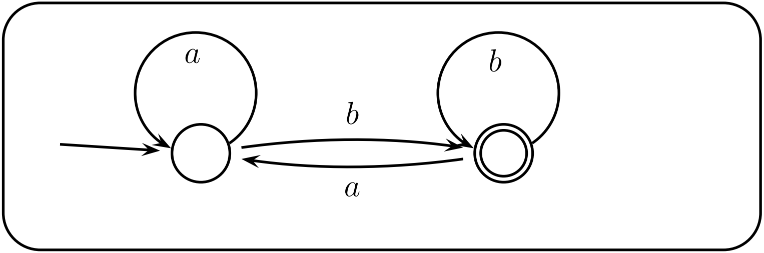
Beispiel 2



Die akzeptierte Sprache ist

$$(a^* b)^\omega$$

Beispiel 2



Die akzeptierte Sprache ist

$$(a^* b)^\omega$$
$$\{w \in \{a, b\}^\omega \mid b \text{ kommt unendlich oft vor in } w\}$$

Entscheidbarkeit

Die Frage, ob für einen Büchi-Automaten $\mathcal{B}$ die Menge der akzeptierten Wörter nicht leer ist, d.h.

$$L^\omega(\mathcal{B}) \neq \emptyset,$$

ist entscheidbar.

Entscheidbarkeit

Die Frage, ob für einen Büchi-Automaten $\mathcal{B}$ die Menge der akzeptierten Wörter nicht leer ist, d.h.

$$L^\omega(\mathcal{B}) \neq \emptyset,$$

ist entscheidbar.

Beweis:

Entscheidbarkeit

Die Frage, ob für einen Büchi-Automaten $\mathcal{B}$ die Menge der akzeptierten Wörter nicht leer ist, d.h.

$$L^\omega(\mathcal{B}) \neq \emptyset,$$

ist entscheidbar.

Beweis:

Um $L^\omega(\mathcal{B}) \neq \emptyset$ zu zeigen muß man nur einen erreichbaren Endzustand $q_f \in F$ finden, der auf einer Schleife liegt.

Entscheidbarkeit

Die Frage, ob für einen Büchi-Automaten $\mathcal{B}$ die Menge der akzeptierten Wörter nicht leer ist, d.h.

$$L^\omega(\mathcal{B}) \neq \emptyset,$$

ist entscheidbar.

Beweis:

Um $L^\omega(\mathcal{B}) \neq \emptyset$ zu zeigen muß man nur einen erreichbaren Endzustand $q_f \in F$ finden, der auf einer Schleife liegt.

Wir nennen eine Menge L von ω-Wörtern **ω-regulär**, wenn es einen Büchi-Automaten $\mathcal{A}$ gibt mit $L^\omega(\mathcal{A}) = L$.

Endliche und unendliche Akzeptanz

Lemma

Sei $\mathcal{A}$ ein endlicher Automat und $K = L(\mathcal{A})$. Dann gilt

1. $L^\omega(\mathcal{A}) \subseteq \vec{K}$

Endliche und unendliche Akzeptanz

Lemma

Sei $\mathcal{A}$ ein endlicher Automat und $K = L(\mathcal{A})$. Dann gilt

1. $L^\omega(\mathcal{A}) \subseteq \vec{K}$
2. Falls $\mathcal{A}$ deterministisch ist gilt sogar $L^\omega(\mathcal{A}) = \vec{K}$

Endliche und unendliche Akzeptanz

Lemma

Sei $\mathcal{A}$ ein endlicher Automat und $K = L(\mathcal{A})$. Dann gilt

1. $L^\omega(\mathcal{A}) \subseteq \vec{K}$
2. Falls $\mathcal{A}$ deterministisch ist gilt sogar $L^\omega(\mathcal{A}) = \vec{K}$

Endliche und unendliche Akzeptanz

Lemma

Sei $\mathcal{A}$ ein endlicher Automat und $K = L(\mathcal{A})$. Dann gilt

1. $L^{\omega}(\mathcal{A}) \subseteq \vec{K}$
2. Falls $\mathcal{A}$ deterministisch ist gilt sogar $L^{\omega}(\mathcal{A}) = \vec{K}$

Beweis zu 1:

Endliche und unendliche Akzeptanz

Lemma

Sei $\mathcal{A}$ ein endlicher Automat und $K = L(\mathcal{A})$. Dann gilt

1. $L^\omega(\mathcal{A}) \subseteq \vec{K}$
2. Falls $\mathcal{A}$ deterministisch ist gilt sogar $L^\omega(\mathcal{A}) = \vec{K}$

Beweis zu 1:

Für $w \in L^\omega(\mathcal{A})$ gibt es eine Berechnungsfolge $\rho_w = s_0, s_1 \ldots s_n \ldots$, so daß $F_w = \{n \in \mathbb{N} \mid s_n \in F\}$ unendlich ist.

Endliche und unendliche Akzeptanz

Lemma

Sei $\mathcal{A}$ ein endlicher Automat und $K = L(\mathcal{A})$. Dann gilt

1. $L^\omega(\mathcal{A}) \subseteq \vec{K}$
2. Falls $\mathcal{A}$ deterministisch ist gilt sogar $L^\omega(\mathcal{A}) = \vec{K}$

Beweis zu 1:

Für $w \in L^\omega(\mathcal{A})$ gibt es eine Berechnungsfolge $\rho_w = s_0, s_1 \ldots s_n \ldots$, so daß $F_w = \{n \in \mathbb{N} \mid s_n \in F\}$ unendlich ist.

Für alle $n \in F_w$ gilt $s_n \in F$

Endliche und unendliche Akzeptanz

Lemma

Sei $\mathcal{A}$ ein endlicher Automat und $K = L(\mathcal{A})$. Dann gilt

1. $L^\omega(\mathcal{A}) \subseteq \vec{K}$
2. Falls $\mathcal{A}$ deterministisch ist gilt sogar $L^\omega(\mathcal{A}) = \vec{K}$

Beweis zu 1:

Für $w \in L^\omega(\mathcal{A})$ gibt es eine Berechnungsfolge $\rho_w = s_0, s_1 \ldots s_n \ldots$, so daß $F_w = \{n \in \mathbb{N} \mid s_n \in F\}$ unendlich ist.

Für alle $n \in F_w$ gilt $s_n \in F$

$\Rightarrow w \downarrow (n) \in K$.

Endliche und unendliche Akzeptanz

Lemma

Sei $\mathcal{A}$ ein endlicher Automat und $K = L(\mathcal{A})$. Dann gilt

1. $L^\omega(\mathcal{A}) \subseteq \vec{K}$
2. Falls $\mathcal{A}$ deterministisch ist gilt sogar $L^\omega(\mathcal{A}) = \vec{K}$

Beweis zu 1:

Für $w \in L^\omega(\mathcal{A})$ gibt es eine Berechnungsfolge $\rho_w = s_0, s_1 \ldots s_n \ldots$, so daß $F_w = \{n \in \mathbb{N} \mid s_n \in F\}$ unendlich ist.

Für alle $n \in F_w$ gilt $s_n \in F$

$\Rightarrow w \downarrow (n) \in K$.

Also $w \in \vec{K}$.

Endliche und unendliche Akzeptanz

Lemma

Sei $\mathcal{A}$ ein endlicher Automat und $K = L(\mathcal{A})$. Dann gilt

1. $L^\omega(\mathcal{A}) \subseteq \vec{K}$
2. Falls $\mathcal{A}$ deterministisch ist gilt sogar $L^\omega(\mathcal{A}) = \vec{K}$

Beweis zu 2:

Endliche und unendliche Akzeptanz

Lemma

Sei $\mathcal{A}$ ein endlicher Automat und $K = L(\mathcal{A})$. Dann gilt

1. $L^\omega(\mathcal{A}) \subseteq \vec{K}$
2. Falls $\mathcal{A}$ deterministisch ist gilt sogar $L^\omega(\mathcal{A}) = \vec{K}$

Beweis zu 2:

Für $w \in \vec{K}$ ist $R_w = \{n \in \mathbb{N} \mid w \downarrow (n) \in K\}$ unendlich.

Endliche und unendliche Akzeptanz

Lemma

Sei $\mathcal{A}$ ein endlicher Automat und $K = L(\mathcal{A})$. Dann gilt

1. $L^\omega(\mathcal{A}) \subseteq \vec{K}$
2. Falls $\mathcal{A}$ deterministisch ist gilt sogar $L^\omega(\mathcal{A}) = \vec{K}$

Beweis zu 2:

Für $w \in \vec{K}$ ist $R_w = \{n \in \mathbb{N} \mid w \downarrow (n) \in K\}$ unendlich.
Für jedes $n \in R_w$ gibt es eine Berechungsfolge
$s_n = s_{n,1}, s_{n,2}, \ldots, s_{n,n}$ für $w \downarrow (n)$.

Endliche und unendliche Akzeptanz

Lemma

Sei $\mathcal{A}$ ein endlicher Automat und $K = L(\mathcal{A})$. Dann gilt

1. $L^\omega(\mathcal{A}) \subseteq \vec{K}$
2. Falls $\mathcal{A}$ deterministisch ist gilt sogar $L^\omega(\mathcal{A}) = \vec{K}$

Beweis zu 2:

Für $w \in \vec{K}$ ist $R_w = \{n \in \mathbb{N} \mid w \downarrow (n) \in K\}$ unendlich.
Für jedes $n \in R_w$ gibt es eine Berechungsfolge
$s_n = s_{n,1}, s_{n,2}, \ldots, s_{n,n}$ für $w \downarrow (n)$.
Da $\mathcal{A}$ deterministisch ist, ist für jedes Paar $n, m \in R_w$ mit $n < m$
s_n Anfangsstück von s_m.

Endliche und unendliche Akzeptanz

Lemma

Sei $\mathcal{A}$ ein endlicher Automat und $K = L(\mathcal{A})$. Dann gilt

1. $L^\omega(\mathcal{A}) \subseteq \vec{K}$
2. Falls $\mathcal{A}$ deterministisch ist gilt sogar $L^\omega(\mathcal{A}) = \vec{K}$

Beweis zu 2:

Für $w \in \vec{K}$ ist $R_w = \{n \in \mathbb{N} \mid w \downarrow (n) \in K\}$ unendlich.
Für jedes $n \in R_w$ gibt es eine Berechungsfolge
$s_n = s_{n,1}, s_{n,2}, \ldots, s_{n,n}$ für $w \downarrow (n)$.
Da $\mathcal{A}$ deterministisch ist, ist für jedes Paar $n, m \in R_w$ mit $n < m$ s_n Anfangsstück von s_m.
Zusammengesetzt erhalten wir eine unendliche Berechnungsfolge s für w, die unendlich oft einen Endzustand durchläuft.

Endliche und unendliche Akzeptanz

Lemma

Sei $\mathcal{A}$ ein endlicher Automat und $K = L(\mathcal{A})$. Dann gilt

1. $L^\omega(\mathcal{A}) \subseteq \vec{K}$
2. Falls $\mathcal{A}$ deterministisch ist gilt sogar $L^\omega(\mathcal{A}) = \vec{K}$

Beweis zu 2:

Für $w \in \vec{K}$ ist $R_w = \{n \in \mathbb{N} \mid w \downarrow (n) \in K\}$ unendlich.
Für jedes $n \in R_w$ gibt es eine Berechungsfolge
$s_n = s_{n,1}, s_{n,2}, \ldots, s_{n,n}$ für $w \downarrow (n)$.
Da $\mathcal{A}$ deterministisch ist, ist für jedes Paar $n, m \in R_w$ mit $n < m$
s_n Anfangsstück von s_m.
Zusammengesetzt erhalten wir eine unendliche Berechnungsfolge s für w, die unendlich oft einen Endzustand durchläuft.
Also $w \in L^\omega(\mathcal{A})$.

Deterministische Büchi-Automaten

und ihre regulären Mengen

Korollar

Für eine ω-Sprache $L \subseteq V^\omega$ sind äquivalent:

- $L = L^\omega(\mathcal{A})$ für einen deterministischen Büchi-Automaten

Deterministische Büchi-Automaten

und ihre regulären Mengen

Korollar

Für eine ω-Sprache $L \subseteq V^\omega$ sind äquivalent:

- $L = L^\omega(\mathcal{A})$ für einen deterministischen Büchi-Automaten
- es eine reguläre Sprache $K \subseteq V^*$ gibt mit $L = \vec{K}$.

Deterministische Büchi-Automaten

und ihre regulären Mengen

Korollar

Für eine ω-Sprache $L \subseteq V^\omega$ sind äquivalent:

- $L = L^\omega(\mathcal{A})$ für einen deterministischen Büchi-Automaten
- es eine reguläre Sprache $K \subseteq V^*$ gibt mit $L = \vec{K}$.

Deterministische Büchi-Automaten

und ihre regulären Mengen

Korollar

Für eine ω-Sprache $L \subseteq V^\omega$ sind äquivalent:

- $L = L^\omega(\mathcal{A})$ für einen deterministischen Büchi-Automaten
- es eine reguläre Sprache $K \subseteq V^*$ gibt mit $L = \vec{K}$.

Beweis:

Deterministische Büchi-Automaten

und ihre regulären Mengen

Korollar

Für eine ω-Sprache $L \subseteq V^\omega$ sind äquivalent:

- $L = L^\omega(\mathcal{A})$ für einen deterministischen Büchi-Automaten
- es eine reguläre Sprache $K \subseteq V^*$ gibt mit $L = \vec{K}$.

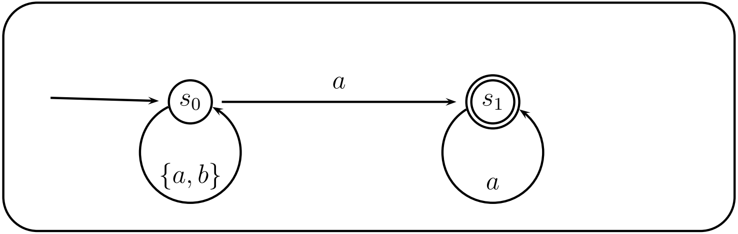
Beweis:

Folgt direkt aus der Tatsache, daß für deterministische Automaten $\mathcal{A}$

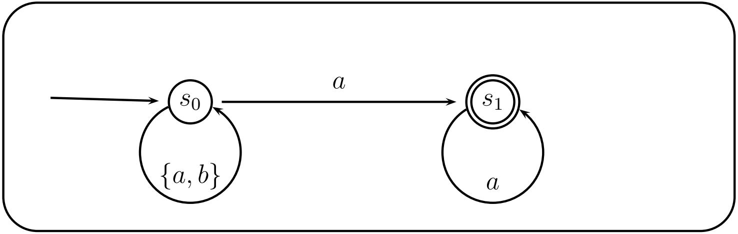
$$L^\omega(\mathcal{A}) = \overrightarrow{L(\mathcal{A})}$$

gilt (vorangeganges Lemma).

Der Beispielautomat N_{bfin}

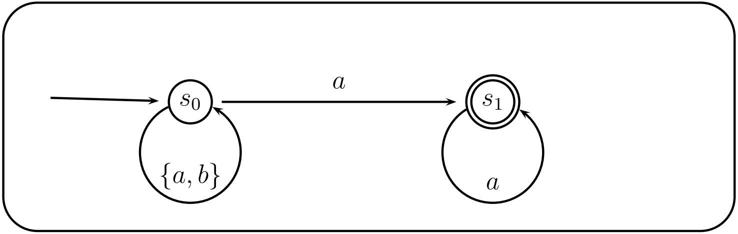


Der Beispielautomat N_{bfin}



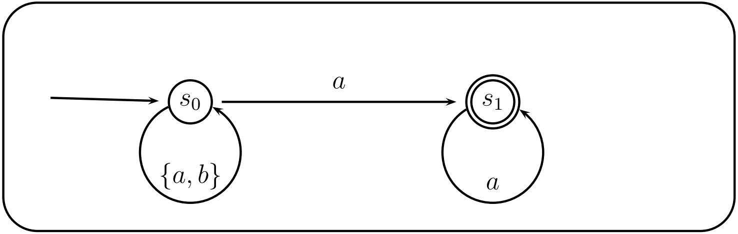
$L^\omega(N_{bfin}) = \{w \in \{a, b\}^\omega \mid \text{ in } w \text{ kommt } b \text{ nur endlich oft vor}\}$

Der Beispielautomat N_{bfin}



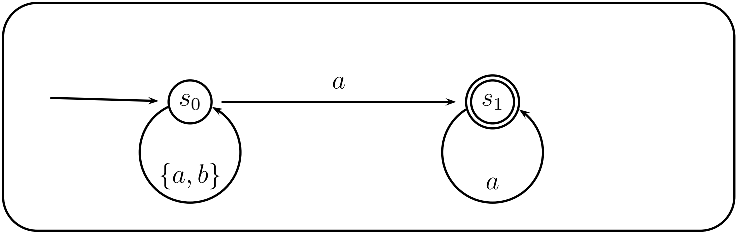
$L^\omega(N_{bfin}) = \{w \in \{a, b\}^\omega \mid$ in w kommt b nur endlich oft vor$\}$
$L(N_{bfin}) = \{w \in \{a, b\}^* \mid w$ endet auf a$\}$.

Der Beispielautomat N_{bfin}



$L^\omega(N_{bfin}) = \{w \in \{a, b\}^\omega \mid$ in w kommt b nur endlich oft vor$\}$
$L(N_{bfin}) = \{w \in \{a, b\}^* \mid w$ endet auf a$\}$.
$Lim(L(N_{bfin})) = \{w \in \{a, b\}^\omega \mid$ in w kommt a unendlich of vor$\}$.

Der Beispielautomat N_{bfin}



$L^\omega(N_{bfin}) = \{w \in \{a, b\}^\omega \mid$ in w kommt b nur endlich oft vor$\}$
$L(N_{bfin}) = \{w \in \{a, b\}^* \mid w$ endet auf a$\}$.
$Lim(L(N_{bfin})) = \{w \in \{a, b\}^\omega \mid$ in w kommt a unendlich of vor$\}$.
Man sieht leicht, daß $L^\omega(N_{bfin}) \neq Lim(L(N_{bfin}))$

Deterministische Büchi-Automaten

Korollar

Es gibt Sprachen $L \subseteq V^\omega$, die von einem nicht-deterministischen Büchi-Automaten akzeptiert werden, aber von keinem deterministischen.

Deterministische Büchi-Automaten

Korollar

Es gibt Sprachen $L \subseteq V^\omega$, die von einem nicht-deterministischen Büchi-Automaten akzeptiert werden, aber von keinem deterministischen.

Beweis:

Deterministische Büchi-Automaten

Korollar

Es gibt Sprachen $L \subseteq V^\omega$, die von einem nicht-deterministischen Büchi-Automaten akzeptiert werden, aber von keinem deterministischen.

Beweis:

Wir wählen $V = \{a, b\}$ und

$$L = L^\omega(N_{bfin}) = \{w \in V^\omega \mid w(n) = b \text{ nur für endlich viele } n\}$$

Angenommen $L = \vec{K}$ für eine reguläre Menge $K \subseteq V^*$.

Deterministische Büchi-Automaten

Korollar

Es gibt Sprachen $L \subseteq V^\omega$, die von einem nicht-deterministischen Büchi-Automaten akzeptiert werden, aber von keinem deterministischen.

Beweis:

Wir wählen $V = \{a, b\}$ und

$$L = L^\omega(N_{bfin}) = \{w \in V^\omega \mid w(n) = b \text{ nur für endlich viele } n\}$$

Angenommen $L = \vec{K}$ für eine reguläre Menge $K \subseteq V^*$.
Es gibt ein $k_1 > 0$ mit $a^{k_1} \in K$, da $a^\omega \in L$.

Deterministische Büchi-Automaten

Korollar

Es gibt Sprachen $L \subseteq V^\omega$, die von einem nicht-deterministischen Büchi-Automaten akzeptiert werden, aber von keinem deterministischen.

Beweis:

Wir wählen $V = \{a, b\}$ und

$$L = L^\omega(N_{bfin}) = \{w \in V^\omega \mid w(n) = b \text{ nur für endlich viele } n\}$$

Angenommen $L = \vec{K}$ für eine reguläre Menge $K \subseteq V^*$.
Es gibt ein $k_1 > 0$ mit $a^{k_1} \in K$, da $a^\omega \in L$.
Dann gibt es auch ein $k_2 > 0$ mit $a^{k_1} b a^{k_2} \in K$, weil $a^{k_1} b a^\omega \in L$.

Deterministische Büchi-Automaten

Korollar

Es gibt Sprachen $L \subseteq V^\omega$, die von einem nicht-deterministischen Büchi-Automaten akzeptiert werden, aber von keinem deterministischen.

Beweis:

Wir wählen $V = \{a, b\}$ und

$$L = L^\omega(N_{bfin}) = \{w \in V^\omega \mid w(n) = b \text{ nur für endlich viele } n\}$$

Angenommen $L = \vec{K}$ für eine reguläre Menge $K \subseteq V^*$.
Es gibt ein $k_1 > 0$ mit $a^{k_1} \in K$, da $a^\omega \in L$.
Dann gibt es auch ein $k_2 > 0$ mit $a^{k_1}ba^{k_2} \in K$, weil $a^{k_1}ba^\omega \in L$.
So fortfahrend gibt es $k_i > 0$ für alle i mit $a^{k_1}ba^{k_2}b \ldots ba^{k_i} \in K$.

Deterministische Büchi-Automaten

Korollar

Es gibt Sprachen $L \subseteq V^\omega$, die von einem nicht-deterministischen Büchi-Automaten akzeptiert werden, aber von keinem deterministischen.

Beweis:

Wir wählen $V = \{a, b\}$ und

$$L = L^\omega(N_{bfin}) = \{w \in V^\omega \mid w(n) = b \text{ nur für endlich viele } n\}$$

Angenommen $L = \vec{K}$ für eine reguläre Menge $K \subseteq V^*$.
Es gibt ein $k_1 > 0$ mit $a^{k_1} \in K$, da $a^\omega \in L$.
Dann gibt es auch ein $k_2 > 0$ mit $a^{k_1} b a^{k_2} \in K$, weil $a^{k_1} b a^\omega \in L$.
So fortfahrend gibt es $k_i > 0$ für alle i mit $a^{k_1} b a^{k_2} b \dots b a^{k_i} \in K$.
Wegen $L = \vec{K}$ folgt daraus auch $a^{k_1} b a^{k_2} b \dots b a^{k_i} b \dots \in L$

Deterministische Büchi-Automaten

Korollar

Es gibt Sprachen $L \subseteq V^\omega$, die von einem nicht-deterministischen Büchi-Automaten akzeptiert werden, aber von keinem deterministischen.

Beweis:

Wir wählen $V = \{a, b\}$ und

$$L = L^\omega(N_{bfin}) = \{w \in V^\omega \mid w(n) = b \text{ nur für endlich viele } n\}$$

Angenommen $L = \vec{K}$ für eine reguläre Menge $K \subseteq V^*$.
Es gibt ein $k_1 > 0$ mit $a^{k_1} \in K$, da $a^\omega \in L$.
Dann gibt es auch ein $k_2 > 0$ mit $a^{k_1} b a^{k_2} \in K$, weil $a^{k_1} b a^\omega \in L$.
So fortfahrend gibt es $k_i > 0$ für alle i mit $a^{k_1} b a^{k_2} b \ldots b a^{k_i} \in K$.
Wegen $L = \vec{K}$ folgt daraus auch $a^{k_1} b a^{k_2} b \ldots b a^{k_i} b \ldots \in L$
im Widerspruch zur Definition von L.

Abschlußeigenschaften

Sind L_1, L_2 ω-reguläre Sprachen und ist K eine reguläre Sprache, dann ist auch

1. $L_1 \cup L_2$ ω-regulär,

Abschlußeigenschaften

Sind L_1, L_2 ω-reguläre Sprachen und ist K eine reguläre Sprache, dann ist auch

1. $L_1 \cup L_2$ ω-regulär,
2. K^ω ω-regulär, falls $\varepsilon \notin K$,

Abschlußeigenschaften

Sind L_1, L_2 ω-reguläre Sprachen und ist K eine reguläre Sprache, dann ist auch

1. $L_1 \cup L_2$ ω-regulär,
2. K^ω ω-regulär, falls $\varepsilon \notin K$,
3. KL_1 ω-regulär,

Abschlußeigenschaften

Sind L_1, L_2 ω-reguläre Sprachen und ist K eine reguläre Sprache, dann ist auch

1. $L_1 \cup L_2$ ω-regulär,
2. K^ω ω-regulär, falls $\varepsilon \notin K$,
3. KL_1 ω-regulär,
4. $V^\omega \setminus L_1$ ω-regulär,

Abschlußeigenschaften

Sind L_1, L_2 ω-reguläre Sprachen und ist K eine reguläre Sprache, dann ist auch

1. $L_1 \cup L_2$ ω-regulär,
2. K^ω ω-regulär, falls $\varepsilon \notin K$,
3. KL_1 ω-regulär,
4. $V^\omega \setminus L_1$ ω-regulär,
5. $L_1 \cap L_2$ ω-regulär.

Beweis

Abschlossenheit unter $\cup$

Seien $\mathcal{A}_i = (Q_i, V, s_0^i, \delta_i, F_i)$ für $i = 1, 2$ Büchi-Automaten und $L_i = L_i^\omega(\mathcal{A}_i)$.

Beweis

Abschlossenheit unter $\cup$

Seien $\mathcal{A}_i = (Q_i, V, s_0^i, \delta_i, F_i)$ für $i = 1, 2$ Büchi-Automaten und $L_i = L_i^\omega(\mathcal{A}_i)$.

Wir können ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß $Q_1 \cap Q_2 = \emptyset$

Beweis

Abschlossenheit unter $\cup$

Seien $\mathcal{A}_i = (Q_i, V, s_0^i, \delta_i, F_i)$ für $i = 1, 2$ Büchi-Automaten und $L_i = L_i^\omega(\mathcal{A}_i)$.

Wir können ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß $Q_1 \cap Q_2 = \emptyset$

Wir konstruieren einen Büchi-Automaten $\mathcal{A} = (Q, V, s_0, \delta, F)$, wobei s_0 ein neuer Zustand ist, der weder in Q_1 noch in Q_2 vorkommt.

Beweis

Abschlossenheit unter $\cup$

Seien $\mathcal{A}_i = (Q_i, V, s_0^i, \delta_i, F_i)$ für $i = 1, 2$ Büchi-Automaten und $L_i = L_i^\omega(\mathcal{A}_i)$.

Wir können ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß $Q_1 \cap Q_2 = \emptyset$

Wir konstruieren einen Büchi-Automaten $\mathcal{A} = (Q, V, s_0, \delta, F)$, wobei s_0 ein neuer Zustand ist, der weder in Q_1 noch in Q_2 vorkommt.

$$\begin{array}{lcll} Q & = & Q_1 \cup Q_2 \cup \{s_0\} & \\ \delta(q, a) & = & \delta_i(q, a) & \text{falls } q \in Q_i \\ \delta(s_0, a) & = & \delta_1(s_0^1, a) \cup \delta_2(s_0^2, a) & \\ F & = & F_1 \cup F_2 & \end{array}$$

Beweis

Abschlossenheit unter $\cup$

Seien $\mathcal{A}_i = (Q_i, V, s_0^i, \delta_i, F_i)$ für $i = 1, 2$ Büchi-Automaten und $L_i = L_i^\omega(\mathcal{A}_i)$.

Wir können ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß $Q_1 \cap Q_2 = \emptyset$

Wir konstruieren einen Büchi-Automaten $\mathcal{A} = (Q, V, s_0, \delta, F)$, wobei s_0 ein neuer Zustand ist, der weder in Q_1 noch in Q_2 vorkommt.

$$
\begin{array}{lcll}
Q & = & Q_1 \cup Q_2 \cup \{s_0\} & \\
\delta(q, a) & = & \delta_i(q, a) & \text{falls } q \in Q_i \\
\delta(s_0, a) & = & \delta_1(s_0^1, a) \cup \delta_2(s_0^2, a) & \\
F & = & F_1 \cup F_2 &
\end{array}
$$

Man zeigt leicht, daß $L^\omega(\mathcal{A}) = L_1 \cup L_2$.

Abgeschlossenheit unter Iteration

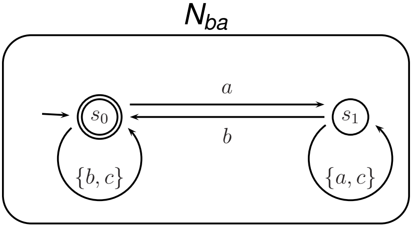
Der Automaten $\mathcal{B} = (Q_B, V, s_0^B, \delta_B, F_B)$ sei definiert durch:

$$
\begin{array}{lcll}
Q_B & = & Q_A & \\
s_0^B & = & s_0^A & \\
\delta_B(q, a) & = & \delta_A(q, a) & \text{falls } q \in Q_B \\
\delta_B(q, \epsilon) & = & \{s_0^B\} & \text{falls } q \in F_A \\
F_B & = & \{s_0^B\} &
\end{array}
$$

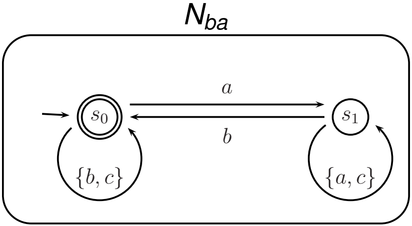
Wir können annehmen, daß für alle $q \in F_A$ und alle $x \in \Sigma$ gilt:

$$s_0^A \notin \delta_A(q, x).$$

Beispiel zur Komplementbildung



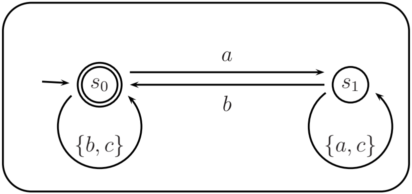
Beispiel zur Komplementbildung



$$L^\omega(N_{ba}) = \{w \in \{a, b, c\}^\omega \mid \text{ nach jedem } a \text{ kommt ein } b\}$$

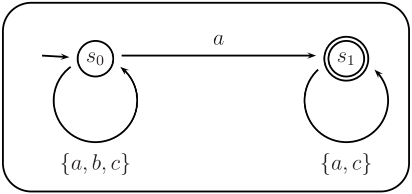
Beispiel zur Komplementbildung

N_{ba}



$$L^\omega(N_{ba}) = \{w \in \{a, b, c\}^\omega \mid \text{ nach jedem } a \text{ kommt ein } b\}$$

coN_{ba}



Die Abgeschlossenheit
ω-regulärer Mengen
unter Komplementbildung
muss noch bewiesen werden.

(siehe Skriptum)

Zerlegungssatz

Satz

$L \subseteq V^\omega$ ist ω-regulär, genau dann, wenn L eine endliche Vereinigung von Mengen der Form

$$JK^\omega$$

für reguläre Mengen $J, K \subseteq V^*$ ist, wobei $\varepsilon \notin K$.