

## Formale Systeme, WS 2015/2016

### Übungsblatt 1

Dieses Übungsblatt wird in der Übung am 31.10.2014 besprochen.

#### Aufgabe 0

Melden Sie sich bei unserem Forum an (siehe <http://formal.iti.kit.edu/teaching/FormSysWS1516/>) und machen sich mit den Funktionen des Forums vertraut. Im Forum können Sie Fragen zur Vorlesung stellen, welche von Ihren Kommilitonen und uns gelesen und beantwortet werden. Bitte beachten Sie, dass die Praxisaufgaben eigenständig bearbeitet werden müssen, und insofern insbesondere keine (Teil-)Lösungen zu den Praxisaufgaben im Forum gepostet werden dürfen.

#### Aufgabe 1

- (a) Zeigen Sie, dass folgende Formel erfüllbar ist, indem Sie ein Modell angeben.

$$((A \rightarrow (A \wedge \neg A)) \vee (A \leftrightarrow B)) \rightarrow B$$

- (b) Zeigen Sie durch aussagenlogische Umformungen, dass folgende Formel unerfüllbar ist.

$$(\neg A \wedge (A \vee \neg A)) \wedge (\neg(A \leftrightarrow B) \wedge \neg B)$$

- (c) Überprüfen Sie, ob folgende Formeln Tautologien sind. Begründen Sie Ihre Antwort.

(i)  $(A \rightarrow B) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C))$

(ii)  $(A \wedge \neg A \rightarrow B) \wedge C$

#### Lösung zu Aufgabe 1

- (a) Wir suchen eine Interpretation, die die Formel wahr macht: Die Implikation wird unter anderem dann wahr, wenn  $B$  wahr ist, d. h. wenn  $I(B) = W$  gilt. In diesem Fall beeinflusst die Wahl von  $A$  die Auswertung der Formel nicht mehr, d. h. z. B. ist  $I(A) = F$  und  $I(B) = W$  ein Modell der Formel.

- (b)

$$(\neg A \wedge (A \vee \neg A)) \wedge (\neg(A \leftrightarrow B) \wedge \neg B) \equiv \quad (\text{tertium non datur})$$

$$(\neg A \wedge \mathbf{1}) \wedge (\neg(A \leftrightarrow B) \wedge \neg B) \equiv \quad (\text{Biimplikation, De Morgan})$$

$$\neg A \wedge (((A \wedge \neg B) \vee (B \wedge \neg A)) \wedge \neg B) \equiv \quad (\text{Distrib., Idem.})$$

$$\neg A \wedge ((A \wedge \neg B) \vee (B \wedge \neg A \wedge \neg B)) \equiv$$

$$\neg A \wedge (A \wedge \neg B) \equiv$$

**0**

- (c) (i) Wir zeigen, dass  $(A \rightarrow B) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C))$  eine Tautologie ist.  
 Fall 1: Ist die Prämisse  $(A \rightarrow B)$  falsch, dann ist die Formel insgesamt wahr.  
 Fall 2: Sei also  $A \rightarrow B$  wahr. Nun gilt es, zu zeigen, dass  $(B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C)$  auch wahr ist.  
 Dies ist trivial gegeben, wenn  
 (Fall 2 a)  $B \rightarrow C$  falsch ist.  
 (Fall 2 b) Sei also  $B \rightarrow C$  wahr. Dann folgt – wegen der Transitivität der Implikation – aus  $A \rightarrow B$  und  $B \rightarrow C$ , dass auch  $A \rightarrow C$  wahr ist.
- (ii) Interpretationen  $I$  mit  $I(C) = F$  erfüllen  $(A \wedge \neg A \rightarrow B) \wedge C$  nicht. Daher ist diese Aussage keine Tautologie.

## Aufgabe 2

Formen Sie die folgenden Formeln in die disjunktive sowie konjunktive Normalform um. Verwenden Sie dafür die in der Vorlesung vorgestellten Äquivalenzen. Kennzeichnen Sie klar die durchgeführten Schritte.

- (a)  $p \rightarrow (p \rightarrow q)$   
 (b)  $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow s)$   
 (c)  $(p \rightarrow (\neg p \vee q)) \wedge \neg(p \rightarrow q)$   
 (d)  $(p \wedge \neg(q \wedge r)) \vee (\neg p \wedge \neg((q \wedge r) \vee \neg q))$

## Lösung zu Aufgabe 2

Generelle Vorgehensweise: (1) Biimplikationen und Implikationen auflösen, (2) NNF herstellen, (3) Distributivgesetz anwenden, dabei stets (4) Zwischenergebnisse vereinfachen (Idempotenz, Absorption, tertium non datur, usw.).

Beachten Sie, daß Normalformen im Allgemeinen nicht eindeutig sind. Andere Rechenwege können also zu anderen Ergebnissen führen.

- (a) DNF:

$$\begin{aligned} p \rightarrow (p \rightarrow q) &\equiv \\ \neg p \vee (\neg p \vee q) &\equiv \text{ (Idempotenz)} \\ \neg p \vee q & \end{aligned}$$

Dies ist auch die KNF.

- (b) KNF:

$$(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow s) \equiv (\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee s)$$

DNF:

$$\begin{aligned} (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow s) &\equiv \\ (\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee s) &\equiv \text{ (Distr.)} \\ ((\neg p \vee q) \wedge \neg q) \vee ((\neg p \vee q) \wedge s) &\equiv \text{ (Distr.)} \\ (\neg p \wedge \neg q) \vee (q \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge s) \vee (q \wedge s) &\equiv \\ (\neg p \wedge \neg q) \vee & \quad (\neg p \wedge s) \vee (q \wedge s) \end{aligned}$$

(c) DNF:

$$\begin{aligned}
 (p \rightarrow (\neg p \vee q)) \wedge \neg(p \rightarrow q) &\equiv \\
 (\neg p \vee (\neg p \vee q)) \wedge \neg(\neg p \vee q) &\equiv \quad \text{(Idem.)} \\
 (\neg p \vee q) \wedge \neg(\neg p \vee q) &\equiv \quad \text{(man sieht nun direkt)} \\
 \mathbf{0} &
 \end{aligned}$$

Als Schreibweise für die DNF würde man an dieser Stelle die leere Disjunktion  $\vee$  benutzen. Dies ist auch die KNF. Achtung: Die leere Konjunktion  $\wedge$  entspricht dagegen einer allgemeingültigen Formel.

(d) DNF:

$$\begin{aligned}
 (p \wedge \neg(q \wedge r)) \vee (\neg p \wedge \neg((q \wedge r) \vee \neg q)) &\equiv \quad \text{(De Morgan)} \\
 (p \wedge (\neg q \vee \neg r)) \vee (\neg p \wedge ((\neg q \vee \neg r) \wedge q)) &\equiv \quad \text{(Distr.)} \\
 (p \wedge \neg q) \vee (p \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg r \wedge q) &\equiv \\
 (p \wedge \neg q) \vee (p \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge \neg r \wedge q) &
 \end{aligned}$$

KNF:

$$\begin{aligned}
 (p \wedge \neg(q \wedge r)) \vee (\neg p \wedge \neg((q \wedge r) \vee \neg q)) &\equiv \quad \text{(De Morgan)} \\
 (p \wedge (\neg q \vee \neg r)) \vee (\neg p \wedge ((\neg q \vee \neg r) \wedge q)) &\equiv \quad \text{(Distr.)} \\
 (p \wedge (\neg q \vee \neg r)) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg r \wedge q) &\equiv \\
 (p \wedge (\neg q \vee \neg r)) \vee (\neg p \wedge \neg r \wedge q) &\equiv \quad \text{(Distr.)} \\
 (p \vee \neg p) \wedge (p \vee \neg r) \wedge (p \vee q) \wedge (\neg q \vee \neg r \vee \neg p) \wedge (\neg q \vee \neg r \vee \neg r) \wedge (\neg q \vee \neg r \vee q) &\equiv \\
 (p \vee \neg r) \wedge (p \vee q) \wedge (\neg q \vee \neg r \vee \neg p) \wedge (\neg q \vee \neg r) &\equiv \quad \text{(Absorp.)} \\
 (p \vee \neg r) \wedge (p \vee q) \wedge (\neg q \vee \neg r) &\equiv \quad \text{(Transitivität d. Impl.)} \\
 (p \vee q) \wedge (\neg q \vee \neg r) &
 \end{aligned}$$

### Aufgabe 3

Geben Sie zwei Formeln  $A$  und  $B$  so an, dass  $A \rightarrow B$  eine Tautologie ist und dass es mindestens zwei nicht äquivalente Interpolanten für  $A \rightarrow B$  gibt. Geben Sie für Ihr Beispiel zwei solche Interpolanten an und zeigen Sie, dass diese tatsächlich Interpolanten von  $A \rightarrow B$  sind.

### Lösung zu Aufgabe 3

Seien  $A \equiv P_1 \wedge P_2 \wedge P_3$  und  $B \equiv P_1 \vee P_2 \vee P_4$ .

Zunächst zeigen wir:  $A \rightarrow B$  ist eine Tautologie. Für  $\text{val}_I(P_1) = F$  ist  $\text{val}_I(A) = F$  und damit die Implikation trivialerweise erfüllt. Für  $\text{val}_I(P_1) = W$  ist andererseits  $\text{val}_I(B) = W$  und damit die Implikation ebenfalls erfüllt.

Die Argumentation zeigt eigentlich schon:  $P_1$  ist eine Interpolante für  $A \rightarrow B$ , denn

- $P_1$  ist in  $A$  und  $B$  enthalten und
- offensichtlich gilt sowohl  $A \rightarrow P_1$  als auch  $P_1 \rightarrow B$ .

Aus dem selben Grund ist aber auch  $P_2$  eine Interpolante.  $P_1 \wedge P_2$  und  $P_1 \vee P_2$  sind weitere Interpolanten.

#### Aufgabe 4

Zeigen Sie:

Sind  $C_1$  und  $C_2$  Interpolanten für die Implikation  $A \rightarrow B$ , dann sind auch  $C_1 \vee C_2$  und  $C_1 \wedge C_2$  Interpolanten für  $A \rightarrow B$ .

#### Lösung zu Aufgabe 4

Seien  $C_1$  und  $C_2$  Interpolanten der Tautologie  $A \rightarrow B$ . Es gilt:

- $A \rightarrow C_1$  und
- $A \rightarrow C_2$ , weil  $C_i$  Interpolaten sind, und
- $C_1 \rightarrow (C_1 \vee C_2)$ , weil es eine AL-Tautologie ist.

Aus den ersten beiden Aussagen folgt bereits  $A \rightarrow (C_1 \wedge C_2)$  und aus der ersten und dritten schon  $A \rightarrow (C_1 \vee C_2)$ . Die beiden anderen Aussagen folgen ziemlich analog aus:

- $C_1 \rightarrow B$ ,
- $C_2 \rightarrow B$  und
- $(C_1 \wedge C_2) \rightarrow C_1$ .

Aus den ersten beiden folgt  $(C_1 \vee C_2) \rightarrow B$  und aus dem ersten und dritten  $(C_1 \wedge C_2) \rightarrow B$ .

Offensichtlich kommt jede aussagenlogische Variable in  $C_1 \wedge C_2$  und  $C_2 \vee C_1$  sowohl in  $A$  als auch in  $B$  vor.