

Formale Systeme, WS 2015/2016

Lösungen zu Übungsblatt 12

Dieses Übungsblatt wurde in der Übung am 5.2.2016 besprochen.

Aufgabe 1

Gegeben sei die Relation $\succ = \{(a, b), (b, d), (c, b), (d, a), (d, e)\}$.

(a) Bestimmen Sie

(i) \rightarrow (die reflexive, transitive Hülle von \succ),

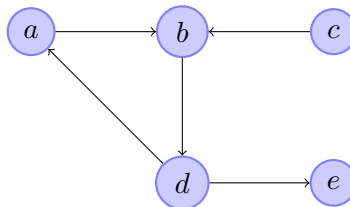
(ii) $\xrightarrow{+}$ (die transitive Hülle von \succ) und

(iii) \leftrightarrow (die reflexive, transitive, symmetrische Hülle von \succ).

(b) Zeigen Sie, dass \succ lokal konfluent sowie konfluent ist.

(c) Erweitern Sie die Relation \succ um ein Tupel, so dass sie zwar lokal konfluent bleibt, aber nicht mehr konfluent ist.

Lösung zu Aufgabe 1



(a)

Die transitive Hülle $\xrightarrow{+} = \{(a, a), (a, b), (a, d), (a, e),$

$(b, a), (b, b), (b, d), (b, e),$

$(c, a), (c, b), (c, d), (c, e),$

$(d, a), (d, b), (d, d), (d, e)\}$.

Die reflexive, transitive Hülle $\rightarrow = \{(a, a), (a, b), (a, d), (a, e),$

$(b, a), (b, b), (b, d), (b, e),$

$(c, a), (c, b), (c, c), (c, d), (c, e),$

$(d, a), (d, b), (d, d), (d, e),$

$(e, e)\}$.

Die reflexive, transitive, symmetrische Hülle $\leftrightarrow = \{a, b, c, d, e\} \times \{a, b, c, d, e\}$.

- (b) Die Knoten a, b, c, e haben nicht mehr als einen Nachfolger bzgl. \succ : an diesen Stellen ist somit keine Divergenz möglich.

Der Knoten d hat zwei unmittelbare Nachfolger: a und e . Wegen $a \xrightarrow{+} e$ (s.o.) ist \succ lokal konfluent. Ebenfalls ist \succ konfluent, da von allen Knoten aus, die von d erreichbar sind (a, b, d, e), der Knoten e erreichbar ist.

(Nota bene: Der Satz, dass jedes noethersche und lokal konfluente Reduktionssystem konfluent ist, ist hier nicht anwendbar, da die Relation nicht noethersch ist.)

- (c) Wir fügen einen neuen Knoten f , sowie das Paar (a, f) hinzu. Die einzige neue Divergenz ist $f \prec a \succ b$. Wegen $b \xrightarrow{+} a \xrightarrow{+} f$ bleibt \succ lokal konfluent. Die neue Relation ist aber nicht konfluent, da $b \xrightarrow{+} e$ gilt, und weder f noch e Nachfolger bzgl. \succ haben.

Aufgabe 2

Seien $N := \mathbb{N} \setminus \{1, 0\}$ und $N' := \mathbb{N} \setminus \{0\}$ Teilmengen der natürlichen Zahlen. Die Relation $\succ \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ ist definiert als

$$a \succ b \quad :\iff \quad b \text{ teilt } a \text{ und } a \neq b \quad (a, b \in \mathbb{N}).$$

Betrachten Sie nun die Reduktionssysteme (N, \succ) und (N', \succ) :

- | | |
|--|---|
| (a) Ist (N, \succ) lokal konfluent? | Ist (N', \succ) lokal konfluent? |
| (b) Ist (N, \succ) konfluent? | Ist (N', \succ) konfluent? |
| (c) Ist (N, \succ) noethersch? | Ist (N', \succ) noethersch? |
| (d) Besitzt (N, \succ) irreduzible Elemente?
Wenn ja, welche? | Besitzt (N', \succ) irreduzible Elemente?
Wenn ja, welche? |

Begründen Sie Ihre Antworten kurz.

Bemerkung: Mit \succ ist jeweils die Einschränkung auf $N \times N$ bzw. $N' \times N'$ gemeint.

Lösung zu Aufgabe 2

Betrachten wir zunächst nur (N, \succ)

- (a) Es gilt:

$$6 \succ 2, \quad 6 \succ 3$$

Aber 2 und 3 sind irreduzible Elemente, weil sie keine echten Teiler größer 1 haben. Also ist das Reduktionssystem **nicht** lokal konfluent.

- (b) ... und damit natürlich auch nicht konfluent.

- (c) Aus $n \succ m$ folgt, dass $n > m$. In \mathbb{N} kann es aber keine unendliche absteigende Kette geben ($(\mathbb{N}, >)$ ist noethersch), also ist (N, \succ) noethersch.

- (d) Die irreduziblen Elemente sind gerade die natürlichen Zahlen, die keine natürlichen Teiler haben außer 1 und sich selbst, also die Primzahlen.

Hier fällt der Begriff irreduzibel mit dem aus der Algebra/Zahlentheorie zusammen.

Desweiteren nun die Betrachtung für (N', \succ) : 1 ist Teiler jeder positiven natürlichen Zahl, also gilt, dass: $n \succ 1$ für alle $n \in N'$.

- (a) folgt aus (b).
- (b) Sei $n \succ m_1$ und $n \succ m_2$. Dann ist wegen $m_1 \succ 1$ und $m_2 \succ 1$ die Konfluenz gegeben.
- (c) Das Argument von oben greift auch hier.
- (d) 1 ist das einzig irreduzible Element.