Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Theoretische Informatik
Prof. Dr. Bernhard Beckert
Dr. Thorsten Bormer, Dr. Vladimir Klebanov, Dr. Mattias Ulbrich

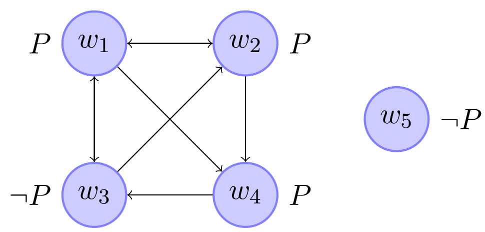
Formale Systeme, WS 2015/2016

Lösungen zu Übungsblatt 13

Dieses Übungsblatt wurde in der Übung am 5.2.2016 besprochen.

Aufgabe 1

Gegeben sei die modallogische Signatur, die nur das Atom P beinhaltet, sowie folgende Kripke-Struktur $\mathcal{K} = (W, R, I)$ über dieser Signatur:



(D.h., dass $W = \{w_1, w_2, w_3, w_4, w_5\}$,
$R = \{(w_1, w_2), (w_1, w_3), (w_1, w_4), (w_2, w_1), (w_2, w_4), (w_3, w_1), (w_3, w_2), (w_4, w_3)\}$,
und für die Interpretation I gilt: $I(P, w_1) = I(P, w_2) = I(P, w_4) = W,\; I(P, w_3) = I(P, w_5) = F$.)

(a) Geben Sie für jede Welt $x \in W$ eine Formel ϕ_x an, so dass für jede Welt $y \in W, x \neq y$ gilt: $val_x(\phi_x) \neq val_y(\phi_x)$.

(b) Die sogenannte *Extension* von ϕ (in der Struktur $\mathcal{K}$) ist $[\![\phi]\!] := \{w \in W \mid val_w(\phi) = W\}$.
Bestimmen Sie für die Struktur $\mathcal{K}$: $[\![\Box P]\!]$, $[\![\Diamond\Box P]\!]$, $[\![\Diamond\Diamond P]\!]$ und $[\![\Box\Box P]\!]$.

Lösung zu Aufgabe 1

(a) Die Unterscheidungsformeln sind (eine Möglichkeit):

$$\phi_{w_5} = \Box\mathbf{0}$$

$$\phi_{w_4} = P \wedge \Box\neg P \qquad \phi_{w_3} = \neg P \wedge \Diamond P \qquad \phi_{w_2} = \Box P \wedge P \qquad \phi_{w_1} = \wedge_{i=w_2}^{w_5} \neg\phi_i$$

(b) Die Extensionen in diesem Modell sind:

$$[\![\Box P]\!] = \{w_2, w_3, w_5\} \qquad [\![\Diamond\Box P]\!] = \{w_1, w_3, w_4\}$$

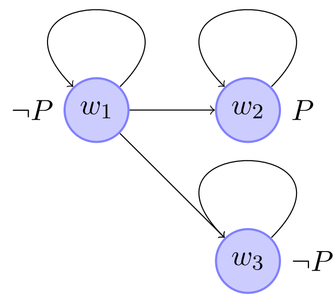
$$[\![\Diamond\Diamond P]\!] = \{w_1, w_2, w_3, w_4\} \qquad [\![\Box\Box P]\!] = \{w_4, w_5\}$$

Aufgabe 2

Wir betrachten die Klasse **T** der Kripke-Strukturen $\mathcal{K} = (W, R, I)$ mit reflexiver Übergangsrelation R, und eine modallogische Signatur, die das Atom P enthält. Geben Sie eine konkrete **T**-Struktur $\mathcal{K}$ an, so daß $\mathcal{K} \models P \to \Box\Diamond P$, jedoch $\mathcal{K} \not\models \Diamond P \to \Box\Diamond P$.

Lösung zu Aufgabe 2

Sei $\mathcal{K}$ der folgende reflexive Kripkerahmen:



Es gilt $\mathcal{K} \models P \to \Box\Diamond P$ wegen $w_2 \models \Box\Diamond P$, da w_2 genau sich selbst als Nachfolger hat. Gleichzeitig $w_1 \not\models \Diamond P \to \Box\Diamond P$, da $w_1 \models \Diamond P$ (wegen $w_1 \to w_2$), aber $w_1 \not\models \Box\Diamond P$ wegen $w_3 \not\models \Diamond P$.

Aufgabe 3

Überprüfen Sie, ob die folgenden Formeln mit den Atomen A und B in allen Kripke-Strukturen, bei denen der Kripke-Rahmen eine strikte Totalordnung[1] ist, allgemeingültig sind. Geben Sie für die nicht allgemeingültigen Formeln Gegenbeispiele an.

(a) $\Box A \to \Diamond A$

(b) $\Diamond A \to \Diamond\Diamond A$

(c) $\Diamond A \land \Diamond B \to \Diamond((A \land \Diamond B) \lor (\Diamond A \land B) \lor (A \land B))$

Hinweis: Für alle $W \subseteq \mathbb{Z}$ ist beispielsweise $(W, <)$ eine strikte Totalordnung.

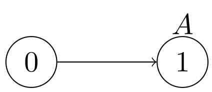
Lösung zu Aufgabe 3

(a) ist nicht allgemeingültig.

Gegenbeispiel: Sei $S = \{0\}$ und $R = \emptyset$, dann ist $0 \models \Box A$, aber nicht $0 \models \Diamond A$.

(b) ist nicht allgemeingültig.

In der unten stehenden Struktur gilt $0 \models \Diamond A$, aber nicht $0 \models \Diamond\Diamond A$.



(c) ist allgemeingültig.

Sei $t_0 \in S$ eine Kripkewelt.

Gelte $\mathcal{K}, t_0 \models \Diamond A \land \Diamond B$, dann gibt es zwei Welten $t_A > t_0$ und $t_B > t_0$, so dass $\mathcal{K}, t_A \models A$ und $K, t_B \models B$. Nun werden wir in einer (erschöpfenden) Fallunterscheidung drei Fälle nebeneinander stellen:

$t_A < t_B$: Dann gilt $\mathcal{K}, t_A \models A \land \Diamond B$, also in t_o auch $\mathcal{K}, t_0 \models \Diamond(A \land \Diamond B)$.

$t_A = t_B$: Dann gilt $\mathcal{K}, t_A \models A \land B$, also in t_o auch $\mathcal{K}, t_0 \models \Diamond(A \land B)$.

$t_A > t_B$: Dann gilt $\mathcal{K}, t_B \models \Diamond A \land B$, also in t_o auch $\mathcal{K}, t_0 \models \Diamond(\Diamond A \land B)$.

Da immer eine der drei Möglichkeiten erfüllt sein muss, ist insgesamt

$$\begin{aligned} & \mathcal{K}, t_0 && \models && \Diamond(A \land \Diamond B) \lor \Diamond(\Diamond A \land B) \lor \Diamond(A \land B) \\ \iff & \mathcal{K}, t_0 && \models && \Diamond((A \land \Diamond B) \lor (\Diamond A \land B) \lor (A \land B)) \end{aligned}$$

Diese Aussage gilt weil die Welten durch die strikte Totalordnung alle „in einer Kette“ liegen. Es gibt keine Verzweigungsmöglichkeiten, so dass auf einem Pfad A und einem anderen B gelten könnte. Die beiden Welten t_A und t_B müssen bezgl. R in Beziehung zu einander stehen.

Die Implikation gilt auch in der Rückrichtung, so daß wir ingesamt erhalten:

$$\begin{aligned} & \mathcal{K}, t_0 && \models && \Diamond((A \land \Diamond B) \lor (\Diamond A \land B) \lor (A \land B)). \\ \iff & \mathcal{K}, t_0 && \models && \Diamond(A \land \Diamond B) \lor \Diamond(\Diamond A \land B) \lor \Diamond(A \land B). \end{aligned}$$

Falls $\mathcal{K}, t_0 \models \Diamond(A \land B)$, so gilt $\mathcal{K}, t_0 \models \Diamond A \land \Diamond B$.
Falls $\mathcal{K}, t_0 \models \Diamond(A \land \Diamond B)$ ($\mathcal{K}, t_0 \models \Diamond(\Diamond A \land B)$ analog), so gilt wegen der Transitivität (d.h. $\Diamond\Diamond A \to \Diamond A$) auch $\mathcal{K}, t_0 \models \Diamond A \land \Diamond B$.

[1] d.h., eine transitive Relation R, bei der zwischen je zwei Elementen a, b immer genau eine der Beziehungen $R(a, b)$, $a = b$ oder $R(b, a)$ besteht.

Aufgabe 4

Modallogische Formeln können auf prädikatenlogische Formeln abgebildet werden, indem man jeder modallogischen Variablen p ein einstelliges Prädikat $p(\cdot)$ zuordnet und außerdem die Zugänglichkeitsrelation der Kripkestruktur als zweistelliges Prädikat $r(\cdot,\cdot)$ darstellt.

Geben Sie eine rekursive Definition dieser Abbildung, die modallogische Formeln φ auf prädikatenlogische Formeln φ' abbildet.

Geben Sie auch an, wie jeder Kripkestruktur $\mathcal{K}$ eine prädikatenlogische Interpretation $\mathcal{K}' = (D_{\mathcal{K}'}, I_{\mathcal{K}'})$ zuzuordnen ist, so dass – wie beabsichtigt – gilt:

$$\mathcal{K} \models \varphi \qquad \text{gdw.} \qquad \mathcal{K}' \models \varphi' \ .$$

Lösung zu Aufgabe 4

Zunächst die Transformation einer modallogischen Struktur $\mathcal{K} = (S, R, I)$ über der Signatur Σ in eine prädikatenlogische Struktur $\mathcal{K}' = (D_{\mathcal{K}'}, I_{\mathcal{K}'})$ über $\Sigma_{\mathcal{K}'}$.

$$\begin{aligned}
D_{\mathcal{K}'} &= S \\
\Sigma_{\mathcal{K}'} &= (\emptyset, \Sigma \cup \{r\}, \alpha) \\
\alpha(p) &= 1 \text{ für } p \in \Sigma \\
\alpha(r) &= 2 \\
I_{\mathcal{K}'}(p) &= \{s \in S : I(p,s) = W\} \\
I_{\mathcal{K}'}(r) &= R
\end{aligned}$$

Das PL-Universum entspricht der Menge der möglichen Welten der Kripkestruktur. Für eine modallogische Formel φ suchen wir daher nun eine PL-Formel $\tilde{\varphi}$, die eine freie Variable x besitzt. Die Belegung von x bestimmt die Welt, in der die Formel „ausgewertet“ werden soll. Dazu transformieren wir durch die folgende, rekursiv anzuwendende Abbildung:

Modallogik φ	Prädikatenlogik $\tilde{\varphi}$	
p	$p(x)$	AL-Atome werden zu Anwendungen von Prädikaten
$\psi \circ \chi$	$\tilde{\psi} \circ \tilde{\chi}$	AL-Verknüpfungen bleiben erhalten
$\Box\psi$	$\forall y(r(x,y) \rightarrow \tilde{\psi}[x \leftarrow y])$	$\Box$ wird zum Allquantor, wobei die Variable y neu gewählt sein muss, also in $\tilde{\psi}$ nicht auftreten darf.
$\Diamond\psi$	$\exists y(r(x,y) \wedge \tilde{\psi}[x \leftarrow y])$	$\Diamond$ wird zum Existenzquantor, wobei die Variable y neu gewählt sein muss, also in $\tilde{\psi}$ nicht auftreten darf.

Offensichtlich enthält jedes $\tilde{\varphi}$ genau eine freie Variable: x. Diese entspricht dem Zustand, in dem die Formel ausgewertet werden soll. Entsprechend bedeutet z.B. die Übersetzung des $\Box$-Operators, dass eine Formel in allen Zuständen y, für die $r(x,y)$ wahr ausgewertet wird, auch wahr ausgewertet werden muss.

Die Aussage $\mathcal{K}, s \models \varphi$ ist damit genau dann wahr, wenn die Aussage $\mathcal{K}', I'_{\mathcal{K}'}, \beta^s_x \models \tilde{\varphi}$ wahr ist. Die Aussage ist in jeder Kripkewelt gültig ($\mathcal{K} \models \varphi$), wenn $\mathcal{K}', I'_{\mathcal{K}'} \models \forall x\ \tilde{\varphi}$ wahr ist. Setze also $\varphi' := \forall x\ \tilde{\varphi}$.

Da umgekehrt aus jeder PL-Interpretation auch eine Kripkestruktur abgeleitet werden kann, gilt sogar die Aussage:

φ ist allgemeingültig in allen Kripkestrukturen gdw. φ' ist prädikatenlogisch allgemeingültig.