Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Theoretische Informatik
Prof. Dr. Bernhard Beckert
Thorsten Bormer, Dr. Vladimir Klebanov, Dr. Mattias Ulbrich

Formale Systeme, WS 2015/2016

Übungsblatt 2

Dieses Übungsblatt wird in der Übung am 13.11.2015 besprochen.

Aufgabe 1

Gegeben sei die Formel

$$A = (P \land \neg Q \land R) \lor (\neg P \land Q \land R) \lor (P \land Q \land R) \lor (P \land \neg Q \land \neg R) \lor (\neg P \land Q \land \neg R) \ .$$

Zeigen Sie, dass die Normalformen

$$\begin{aligned} A' &= (P \land \neg Q) \lor (\neg P \land Q) \lor (P \land R) \\ A'' &= (P \land \neg Q) \lor (\neg P \land Q) \lor (Q \land R) \end{aligned}$$

äquivalent zu A sind.

Lösung zu Aufgabe 1

Exemplarisch für A'; A'' analog.

$$\begin{aligned} A &= (P \land \neg Q \land R) \lor (\neg P \land Q \land R) \lor (P \land Q \land R) \lor (P \land \neg Q \land \neg R) \lor (\neg P \land Q \land \neg R) \\ &\overset{1}{\equiv} (P \land \neg Q \land R) \lor (\neg P \land Q \land R) \lor (P \land Q \land R) \lor (P \land \neg Q \land \neg R) \lor (\neg P \land Q \land \neg R) \lor (P \land \neg Q \land R) \\ &\overset{2}{\equiv} (P \land \neg Q) \lor (\neg P \land Q) \lor (P \land R) \end{aligned}$$

Es wird die *Kommutativität* und *Assoziativität* gebraucht, um die Teilformeln umzustellen oder umzugruppieren.

Zu 1: Die erste Teilformel kann wegen der *Idempotenz* von $\lor$ dupliziert werden und wird am Ende hinzugefügt.

Zu 2: Jeweils zwei Teilformeln lassen sich dann wegen *Distributivität* (a), *Tertium-non-datur* (b) und der Eigenschaft von **1** als *neutralem Element* bezgl. $\land$ (c) reduzieren, beispielsweise:

$$\begin{aligned} & (P \land \neg Q \land R) \lor (P \land \neg Q \land \neg R) \\ \overset{(a)}{\equiv}\ & (P \land \neg Q) \land (R \lor \neg R) \\ \overset{(b)}{\equiv}\ & (P \land \neg Q) \land \mathbf{1} \\ \overset{(c)}{\equiv}\ & P \land \neg Q \end{aligned}$$

Man soll sehen, dass die beiden Formeln A' und A'' beide (minimale) DNF für A sind und diese daher (obwohl Normalform) überhaupt nicht eindeutig ist.

Aufgabe 2

Für $n \in \mathbb{N}$ ist die Formel

$$A_n = P_1 \leftrightarrow P_2 \leftrightarrow P_3 \leftrightarrow \ldots \leftrightarrow P_{n-1} \leftrightarrow P_n$$

gegeben. Sei A_n^{kknf} eine zu A_n erfüllbarkeitsäquivalente Formel in kurzer KNF. Dabei sei die kurze KNF mit einer geringfügigen Modifikation des Verfahrens aus der Vorlesung hergestellt worden, bei dem für je eine Äquivalenz zwischen zwei Atomen ein neues Atom Q_i eingeführt wird.

(a) Geben Sie A_4^{kknf} an.

(b) Wie viele Disjunktionen enthält A_n^{kknf}?

Lösung zu Aufgabe 2

(a) Die Anwendung des beschriebenen Verfahrens auf A_4 ergibt folgendes (modulo Assoziativität):

$$A_4 = \underbrace{\underbrace{P_1 \leftrightarrow P_2}_{Q_1} \leftrightarrow P_3}_{Q_2} \leftrightarrow P_4$$

Dies führt zu folgenden Äquivalenzen:

$$\begin{array}{lcl} Q_1 & \leftrightarrow & P_1 \leftrightarrow P_2 \\ Q_2 & \leftrightarrow & Q_1 \leftrightarrow P_3 \\ & & Q_2 \leftrightarrow P_4 \end{array}$$

$Q_i \leftrightarrow (Q_{i-1} \leftrightarrow P_{i+1})$ (mit $Q_0 = P_1$) lässt sich wie folgt als KNF mit 4 Klausel mit je zwei Disjunktionen darstellen. Zunächst bemerken wir das jede Äquivalenz $A \leftrightarrow B$ logisch äquivalent ist zu $(A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)$ und zu $(A \vee \neg B) \wedge (\neg A \vee B)$. Von diesen beiden Äquivalenzen wird in der folgenden äquivalenten Umformungskette Gebrauch gemacht.

$$\begin{array}{llcl} & Q_i \leftrightarrow (Q_{i-1} \leftrightarrow P_{i+1}) & & \\ \equiv & Q_i \vee \neg(Q_{i-1} \leftrightarrow P_{i+1}) & \wedge & \neg Q_i \vee (Q_{i-1} \leftrightarrow P_{i+1}) \\ \equiv & Q_i \vee \neg((Q_{i-1} \wedge P_{i+1}) \vee (\neg Q_{i-1} \wedge \neg P_{i+1})) & \wedge & \neg Q_i \vee ((\neg Q_{i-1} \vee P_{i+1}) \wedge (Q_{i-1} \vee \neg P_{i+1})) \\ \equiv & Q_i \vee (\neg(Q_{i-1} \wedge P_{i+1}) \wedge \neg(\neg Q_{i-1} \wedge \neg P_{i+1})) & \wedge & \neg Q_i \vee ((\neg Q_{i-1} \vee P_{i+1}) \wedge (Q_{i-1} \vee \neg P_{i+1})) \\ \equiv & Q_i \vee ((\neg Q_{i-1} \vee \neg P_{i+1}) \wedge (Q_{i-1} \vee P_{i+1})) & \wedge & (\neg Q_i \vee \neg Q_{i-1} \vee P_{i+1}) \wedge (\neg Q_i \vee Q_{i-1} \vee \neg P_{i+1}) \\ \equiv & (Q_i \vee \neg Q_{i-1} \vee \neg P_{i+1}) \wedge (Q_i \vee Q_{i-1} \vee P_{i+1}) & \wedge & (\neg Q_i \vee \neg Q_{i-1} \vee P_{i+1}) \wedge (\neg Q_i \vee Q_{i-1} \vee \neg P_{i+1}) \end{array}$$

Insgesamt ergibt sich also:

$$\begin{array}{lcl} A_4 & \equiv & (Q_1 \vee \neg P_1 \vee \neg P_2) \wedge (Q_1 \vee P_1 \vee P_2) \quad \wedge \quad (\neg Q_1 \vee \neg P_1 \vee P_2) \wedge (\neg Q_1 \vee P_1 \vee \neg P_2) \\ & \wedge & (Q_2 \vee \neg Q_1 \vee \neg P_3) \wedge (Q_2 \vee Q_1 \vee P_3) \quad \wedge \quad (\neg Q_2 \vee \neg Q_1 \vee P_3) \wedge (\neg Q_2 \vee Q_1 \vee \neg P_3) \\ & \wedge & (Q_2 \vee \neg P_4) \wedge (\neg Q_2 \vee P_4) \end{array}$$

(b) Die Anwendung des beschriebenen Verfahrens auf A_n ergibt folgendes (modulo Assoziativität):

$$A_n = \underbrace{\underbrace{\underbrace{P_1 \leftrightarrow P_2}_{Q_1} \leftrightarrow P_3}_{Q_2} \leftrightarrow \ldots \leftrightarrow P_{n-1}}_{Q_{n-2}} \leftrightarrow P_n$$

Dies führt zu folgenden Äquivalenzen:

$$\begin{array}{rcl}
Q_1 & \leftrightarrow & P_1 \leftrightarrow P_2 \\
Q_2 & \leftrightarrow & Q_1 \leftrightarrow P_3 \\
Q_3 & \leftrightarrow & Q_2 \leftrightarrow P_4 \\
& \vdots & \\
Q_{n-2} & \leftrightarrow & Q_{n-3} \leftrightarrow P_{n-1} \\
& & Q_{n-2} \leftrightarrow P_n
\end{array}$$

Für die ersten $n-2$ Äquivalenzen lässt sich die KNF mit je 4 Disjunktionen bilden (siehe oben), für $Q_{n-2} \leftrightarrow P_n$ mit 2 Disjunktionen. Insgesamt sind das also

$$(n-2) \cdot 4 + 2 = 4n - 6$$

Klauseln, nur $O(n)$ viele.

Aufgabe 3

Geben Sie den reduzierten Shannon Graphen (BDD) an, der äquivalent ist zu der *sh*-Formel

$$sh(P_3, P_2, P_1)$$

und die Ordnung $P_1 < P_2 < P_3$ auf den aussagenlogischen Variablen respektiert.

Lösung zu Aufgabe 3

Abbildung 1 zeigt den gesuchten BDD. Wie man sieht ist die Reihenfolge der Variablen bei BDDs durchaus von Bedeutung!

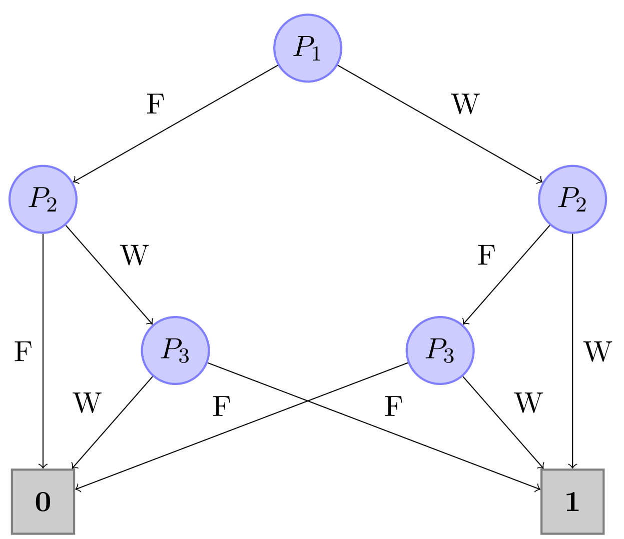

Abbildung 1: Shannon-Graph zu Aufgabe 3

Aufgabe 4

Gegeben sei für $n \in \mathbb{N}$ die **Paritätsfunktion**[1] $f_n : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ durch

$$f_n(P_1, P_2, \ldots, P_n) = \begin{cases} 1 & \text{falls die Summe } P_1 + \cdots + P_n \text{ ungerade ist} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Geben Sie einen reduzierten Shannongraphen für die Funktion f_4 an.

Lösung zu Aufgabe 4

Geht man streng nach Schema vor, so beginnt man mit einem vollständigen Entscheidungsbaum (s. Abb. 1) und wendet darauf das Reduktionsverfahren aus der Vorlesung an. Zunächst wird man feststellen, dass die P_4-Unterbäume wegen Isomorphie auf zwei reduziert werden können. Im entstehenden Graphen sind je zwei bei einem P_3-Knoten beginnende Untergraphen isomorph, die beiden P_2 bleiben erhalten. Insgesamt ergibt sich Abbildung 2.

Man kann auch direkt auf diese Darstellung kommen, wenn man von der Aufgabenstellung selbst ausgeht. Es spielt bei der Auswertung des Graphen keine Rolle in welcher Nullen und Einsen aufeinander folgen, einzig die bisherige Parität der Eingabe ist relevant. Z.B. sollten wir uns beim Auswerten von P_4 im selben Knoten befinden, egal, ob $(P_1, P_2, P_3) = (1, 0, 0)$ oder $(0, 1, 0)$ oder $(1, 1, 1)$ war. Einzig die bisherige Parität und die Belegung von P_4 sind entscheidend für die weitere Auswertung. Da es nur 2 Paritätszustände gibt, ist klar, dass es für $i \geq 2$ genau 2 Knoten mit der Beschriftung P_i geben muss. Eine 1 führt dabei zur jeweils anderen „Paritäts-Gruppe", eine 0 erhält die Parität.

Weiterführende Frage: Wie sieht der reduzierte Shannongraph für die allgemeine Funktion f_n aus?

Das oben gessagte gilt auch für allgemeines n: Das Verhalten hängt nicht von der Belegung der vorangegangenen Variablen ab, sondern nur von deren Parität, damit wird es weiter für jede Variable zwei Knoten geben, für jede Parität einen.

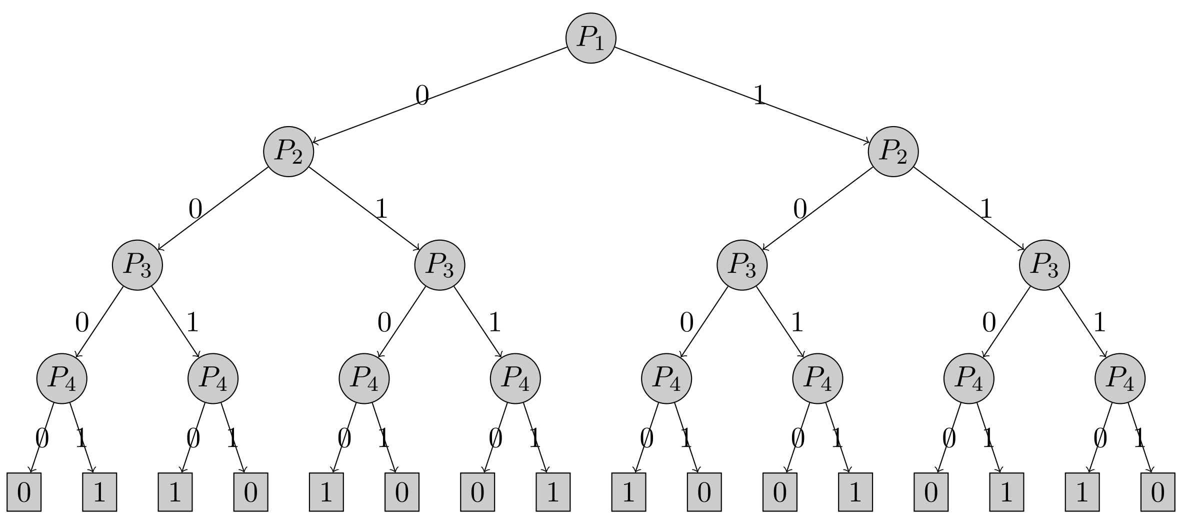

Abbildung 2: Ausgangsbaum für Aufgabe 6

[1] Streng genommen müsste diese Funktion auf der Menge $\{F, W\}$ operieren, aber die Formulierbarkeit als Summe legt diese etwas andere Schreibweise nahe.

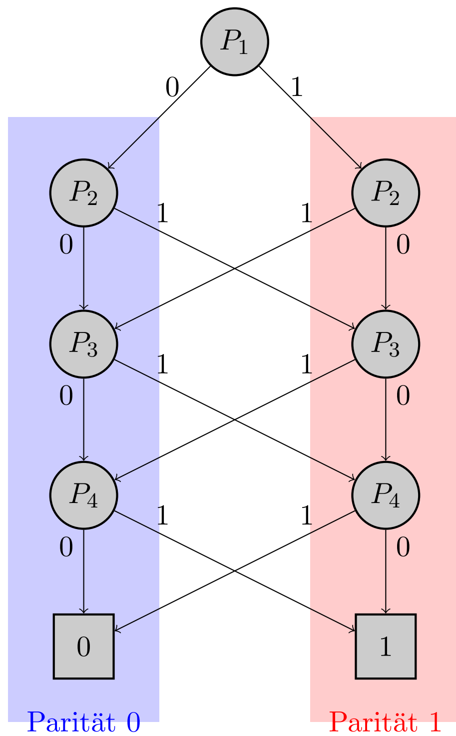

Abbildung 3: Shannongraph zu Aufgabe 6