Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Theoretische Informatik
Prof. Dr. Bernhard Beckert
Thorsten Bormer, Dr. Vladimir Klebanov, Dr. Mattias Ulbrich

Formale Systeme, WS 2015/2016

Übungsblatt 3

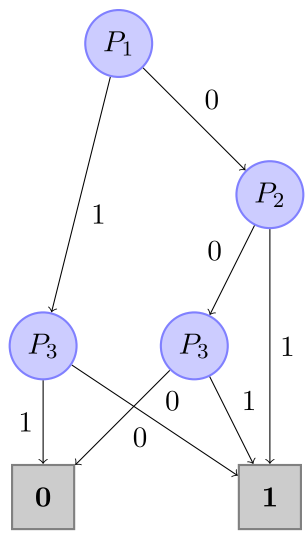
Dieses Übungsblatt wird in der Übung am 13.11.2015 besprochen.

Aufgabe 1

Geben Sie zu folgendem Shannongraphen je eine äquivalente aussagenlogische Formel in

(a) disjunktiver Normalform und

(b) konjunktiver Normalform an.



Lösung zu Aufgabe 1

(a) Die natürlichste DNF ist die Disjunktion aller Pfade zur **1**. Die genommenen Kanten eines Pfades werden dabei konjunktiv verknüpft: Bei Kanten-Markierung **1** mit dem Literal des verlassenen Knotens, bei Kanten-Markierung **0** mit der Negation des entsprechenden Literals.

$$(P_1 \land \neg P_3) \lor (\neg P_1 \land \neg P_2 \land P_3) \lor (\neg P_1 \land P_2)$$

(b) Wie so oft ist das das Duale: Die Konjunktion aller Pfade zur 0. Die genommenen Kanten eines Pfades werden dabei disjunktiv verknüpft: Bei Kanten-Markierung $\boxed{\mathbf{0}(!)}$ mit dem Literal des verlassenen Knotens, bei Kanten-Markierung $\boxed{\mathbf{1}(!)}$ mit der Negation des entsprechenden Literals.

$$(\neg P_1 \lor \neg P_3) \land (P_1 \lor P_2 \lor P_3)$$

Idee: Während man bei (a) alle möglichen Wege zur **1** aufzählt, stellt man in (b) Bedingungen auf, damit die **0** vermieden wird.

Aufgabe 2

Überprüfen Sie folgende Hornformeln auf Erfüllbarkeit. Benutzen Sie dazu den in der Vorlesung vorgestellten Markierungsalgorithmus. Geben Sie im Falle der Erfüllbarkeit ein Modell an. Im Fall von Teilaufgabe (d) bringen Sie die Formel zunächst in die Implikationsschreibweise.

(a) $(P_1 \wedge P_2 \rightarrow P_3) \wedge (P_1 \wedge P_3 \rightarrow P_4) \wedge P_1 \wedge (P_2 \rightarrow P_4) \wedge P_3$

(b) $P_5 \wedge (P_2 \wedge P_4 \rightarrow \mathbf{0}) \wedge (P_5 \rightarrow P_1) \wedge (P_2 \wedge P_5 \rightarrow P_4) \wedge (P_1 \rightarrow P_2)$

(c) $(P_3 \rightarrow \mathbf{0}) \wedge (P_1 \rightarrow P_4) \wedge (P_2 \wedge P_4 \rightarrow P_3) \wedge (P_4 \rightarrow P_5)$

(d) $A \wedge (\neg A \vee B) \wedge (\neg B \vee \neg C \vee D) \wedge \neg E \wedge (\neg A \vee \neg C) \wedge D$

Lösung zu Aufgabe 2

(a)
 (i) Zunächst Fakten markieren: P_1 und P_3
 $(\boxed{P_1} \wedge P_2 \rightarrow \boxed{P_3}) \wedge (\boxed{P_1} \wedge \boxed{P_3} \rightarrow P_4) \wedge \boxed{P_1} \wedge (P_2 \rightarrow P_4) \wedge \boxed{P_3}$
 (ii) Wegen $P_1 \wedge P_3 \rightarrow P_4$ muss P_4 auch markiert werden:
 $(\boxed{P_1} \wedge P_2 \rightarrow \boxed{P_3}) \wedge (\boxed{P_1} \wedge \boxed{P_3} \rightarrow \boxed{P_4}) \wedge \boxed{P_1} \wedge (P_2 \rightarrow \boxed{P_4}) \wedge \boxed{P_3}$
 (iii) Keine weitere Markierung möglich und keine Widersprüche $\Longrightarrow$ Erfüllbar

 Bei dieser Hornformel ist erkennbar, dass jede Klausel ein positives Literal enthält und somit die konstante Interpretation $I_W \equiv W$, die jede Variable zu W auswertet, die Formel erfüllt.

(b)
 (i) Zunächst die Fakten markieren: P_5
 $\boxed{P_5} \wedge (P_2 \wedge P_4 \rightarrow \mathbf{0}) \wedge (\boxed{P_5} \rightarrow P_1) \wedge (P_2 \wedge \boxed{P_5} \rightarrow P_4) \wedge (P_1 \rightarrow P_2)$
 (ii) Wegen $P_5 \rightarrow P_1$ muss auch P_1 markiert werden.
 $\boxed{P_5} \wedge (P_2 \wedge P_4 \rightarrow \mathbf{0}) \wedge (\boxed{P_5} \rightarrow \boxed{P_1}) \wedge (P_2 \wedge \boxed{P_5} \rightarrow P_4) \wedge (\boxed{P_1} \rightarrow P_2)$
 (iii) Wegen $P_1 \rightarrow P_2$ muss auch P_2 markiert werden.
 $\boxed{P_5} \wedge (\boxed{P_2} \wedge P_4 \rightarrow \mathbf{0}) \wedge (\boxed{P_5} \rightarrow \boxed{P_1}) \wedge (\boxed{P_2} \wedge \boxed{P_5} \rightarrow P_4) \wedge (\boxed{P_1} \rightarrow \boxed{P_2})$
 (iv) Wegen $P_2 \wedge P_5 \rightarrow P_4$ muss auch P_4 markiert werden.
 $\boxed{P_5} \wedge (\boxed{P_2} \wedge \boxed{P_4} \rightarrow \mathbf{0}) \wedge (\boxed{P_5} \rightarrow \boxed{P_1}) \wedge (\boxed{P_2} \wedge \boxed{P_5} \rightarrow \boxed{P_4}) \wedge (\boxed{P_1} \rightarrow \boxed{P_2})$
 (v) In der Klausel $P_2 \wedge P_4 \rightarrow \mathbf{0}$ sind alle Variablen im Rumpf markiert, der Kopf enthält aber $\mathbf{0}$ $\Longrightarrow$ <u>Nicht</u> erfüllbar

(c) Diese Formel enthält keine Fakten $\Longrightarrow$ Erfüllbar, z.B. durch die Belegung $I_F \equiv F$, die jede Variable zu F auswertet.

(d) Die Formel $A \wedge (\neg A \vee B) \wedge (\neg B \vee \neg C \vee D) \wedge \neg E \wedge (\neg A \vee \neg C) \wedge D$ ist erfüllbar. Implikationsschreibweise:

$$A \wedge (A \rightarrow B) \wedge (B \wedge C \rightarrow D) \wedge (E \rightarrow \mathbf{0}) \wedge (A \wedge C \rightarrow \mathbf{0}) \wedge D$$

 Modell: $I(A) = W$, $I(B) = W$, $I(C) = F$, $I(D) = W$, $I(E) = F$.

Aufgabe 3

Zeigen Sie mit Hilfe des David-Putnam-Verfahrens, dass die Klauselmenge

$$\{ \ \{\neg B, C\}, \quad \{\neg A, B, C\}, \quad \{\neg A, B, \neg C\}, \quad \{\neg B, \neg C\}, \quad \{A, B, C\}, \quad \{A, B, \neg C\} \ \}$$

unerfüllbar ist.

Lösung zu Aufgabe 3

Die Ausgangsmenge S hat keine Einerklausel, daher muss ein Literal L gewählt werden, über das die Fallunterscheidung stattfinden soll. Geschickterweise wählen wir B, damit bei diesem Schritt dann Einerklauseln entstehen.

- Fall S_B: Im zweiten Schritt wird hier die Einerklausel $\{C\}$ gewählt und wahr gemacht:

S_B		
$\{B\}$,	–	–
$\{\neg B, C\}$,	$\{C\}$	–
$\{\neg A, B, C\}$,	–	–
$\{\neg A, B, \neg C\}$,	–	–
$\{\neg B, \neg C\}$,	$\{\neg C\}$	$\square$
$\{A, B, C\}$,	–	–
$\{A, B, \neg C\}$	–	–

  Es entsteht die leere Klausel, also ist die Menge S_B unerfüllbar.

- Fall $S_{\neg B}$: Hier gibt es für den zweiten Schritt keine Einerklauseln zum Wählen, so dass erneut eine Verzweigung (z.B. nach A) stattfinden muss. Danach entstehen dann komplementäre Einerklauseln, die wie oben aufgelöst werden.

$S_{\neg B}$		$S_{\neg B, A}$		$S_{\neg B, \neg A}$	
		$\{A\}$	–	$\{\neg A\}$	–
$\{\neg B\}$,	–	–	–	–	–
$\{\neg B, C\}$,	–	–	–	–	–
$\{\neg A, B, C\}$,	$\{\neg A, C\}$	$\{\neg A, C\}$	$\{C\}$	$\{\neg A, C\}$	–
$\{\neg A, B, \neg C\}$,	$\{\neg A, \neg C\}$	$\{\neg A, \neg C\}$	$\{\neg C\}$	$\{\neg A, \neg C\}$	–
$\{\neg B, \neg C\}$,	–	–	–	–	–
$\{A, B, C\}$,	$\{A, C\}$	$\{A, C\}$	–	$\{A, C\}$	$\{C\}$
$\{A, B, \neg C\}$	$\{A, \neg C\}$	$\{A, \neg C\}$	–	$\{A, \neg C\}$	$\{\neg C\}$

Aufgabe 4

Die Linux-Distribution openSUSE verwendet für die Paketverwaltung einen SAT-Solver. Das Verfahren ist unter `https://en.opensuse.org/openSUSE:Libzypp_satsolver_basics` beschrieben.

Formalisieren Sie das folgende Szenario mittels Aussagenlogik, benutzen Sie die kursiv gedruckten Begriffe als Variablennamen:

1. Der Benutzer möchte den Mail-Client *mutt* installieren.
2. Der Mail-Client erfordert einen *smtp daemon*.
3. Ein gültiger *smtp daemon* ist entweder *sendmail*, *postfix* oder *exim* (es kann nur einer gleichzeitig installiert werden).
4. *sendmail* macht das installierte Legacy-Paket *sendmail-tls* obsolet, das aber nicht deinstalliert werden darf.

Kann die Paketverwaltung die Wünsche des Benutzers erfüllen?

Lösung zu Aufgabe 4

Die Formalisierung ist die Konjunktion folgender Teile:

Der Benutzer möchte den Mail-Client *mutt* installieren.	$mutt$
Der Mail-Client erfordert einen *smtp daemon*.	$mutt \rightarrow smtp\_daemon$
Ein gültiger *smtp daemon* ist entweder *sendmail*, *postfix* oder *exim*,	$smtp\_daemon \rightarrow$ $(sendmail \vee postfix \vee exim)$
es kann nur einer gleichzeitig installiert werden.	$\neg(sendmail \wedge postfix)$ $\neg(sendmail \wedge exim)$ $\neg(postfix \wedge exim)$
sendmail macht das installierte Legacy-Paket *sendmail-tls* obsolet,	$\neg(sendmail \wedge sendmail\text{-}tls)$
das aber nicht deinstalliert werden darf.	$sendmail\text{-}tls$

Die Formel hat zwei verschiedene Modelle:

$$I(mutt) = W, I(smtp\_daemon) = W, I(sendmail) = F, I(postfix) = W, I(exim) = F, I(sendmail\text{-}tls) = W$$

oder

$$I(mutt) = W, I(smtp\_daemon) = W, I(sendmail) = F, I(postfix) = F, I(exim) = W, I(sendmail\text{-}tls) = W$$

Die als wahr interpretierten Atome geben genau die Pakete an, die installiert sind oder werden müssen, um den Benutzerwunsch zu erfüllen.

Im allgemeinen wählt der in openSuSE implementierter SAT-Solver das Modell, das sich am wenigsten von dem Modell unterscheidet, das den Anfangszustand des Systems beschreibt.

Aufgabe 5

Handelt es sich bei den folgenden Zeichenketten um Terme oder Formeln der Prädikatenlogik erster Stufe? Welche Vorkommen welcher Variablen sind frei, welche gebunden?

(a) $j(f(x), g(x), h(z), k)$

(b) $\forall y \exists p\, p(y)$

(c) $\forall x \forall z\, (g(f(z), f(y)) \to z)$

(d) $\forall x \exists y\, (p(f(x)) \to q(y, z))$

Die Signatur enthalte dabei folgende Symbole: $F_\Sigma = \{f, g, h, i, j, k\}$, $P_\Sigma = \{p, q, r\}$. Die Stelligkeiten der Symbole können Sie als korrekt verwendet annehmen. Außerdem sei $Var = \{x, y, z\}$.

Lösung zu Aufgabe 5

(a) $j(f(x), g(x), h(z), k)$ ist ein wohlgeformter Term.

(b) $\forall y \exists p\, p(y)$ ist weder Term noch Formel. In PL1 ist es nicht möglich, über Prädikatensymbole zu quantifizieren ($\exists p$).

(c) $\forall x \forall z\, (g(f(z), f(y)) \to z)$ ist weder Term noch Formel. Implikation zwischen Termen ist nicht wohlgeformt.

(d) $\forall x \exists y\, (p(f(\underset{\text{gebunden}}{\underset{\uparrow}{x}})) \to q(\overset{\text{gebunden}}{\overset{\downarrow}{y}}, \underset{\text{frei}}{\underset{\uparrow}{z}}))$ ist eine Formel. Die Variablenvorkommen sind entsprechend markiert.