

Formale Systeme, WS 2015/2016

Übungsblatt 5

Dieses Übungsblatt wird in der Übung am 27.11.2015 besprochen.

Aufgabe 1

In der Vorlesung wurden die beiden Interpretationen \mathcal{Z} und $\mathcal{Z}_{\text{Jint}}$ der Signatur, die $+$, $*$ (Funktionssymbole) und \leq (Prädikatsymbol) enthält, vorgestellt.

Überprüfen Sie, ob die folgenden Formeln in \mathcal{Z} und $\mathcal{Z}_{\text{Jint}}$ erfüllt sind oder nicht. Begründen Sie jeweils kurz.

(a) $\forall y(\exists k_1(2 * k_1 \doteq y) \rightarrow \exists k_2(2 * k_2 \doteq y + 2))$

(b) $\forall x(0 \leq x \rightarrow x \leq x * 2)$

(c) $\exists x \forall y(x \leq y)$

Lösung zu Aufgabe 1

Mit ψ_a, ψ_b, ψ_c werden die Formeln aus der Aufgabenstellung bezeichnet.

(a) in \mathcal{Z} : Die Auswertung von ψ_a in \mathcal{Z} ergibt die Bedingung

Ist $y \in \mathbb{Z}$ gerade, dann ist auch $y + 2$ gerade

Dies ist in \mathbb{Z} erfüllt, denn aus $y = 2 * k$ folgt, dass $y + 2 = 2 * (k + 1)$ trivialerweise auch gerade ist.

in $\mathcal{Z}_{\text{Jint}}$: Die Auswertung von ψ_a in $\mathcal{Z}_{\text{Jint}}$ ergibt die Bedingung

Gibt es für $y \in \mathbb{Z}_{\text{Jint}}$ ein $k_1 \in \mathbb{Z}_{\text{Jint}}$ mit $y = 2 * k_1$, so gibt es für $y + 2$ ein $k_2 \in \mathbb{Z}_{\text{Jint}}$ mit $y + 2 = 2 * k_2$.

Sei die Funktion $\text{mod}_{\mathcal{Z}_{\text{Jint}}} : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}_{\text{Jint}}$ gegeben durch $\text{mod}_{\mathcal{Z}_{\text{Jint}}}(x) \equiv x \pmod{2^{32}}$ mit $\text{MININT} \leq \text{mod}_{\mathcal{Z}_{\text{Jint}}}(x) \leq \text{MAXINT}$ die Normalisierungsfunktion für Java-Integer. Nach Definition gilt für die Operationen in $\mathcal{Z}_{\text{Jint}}$:

$$\begin{aligned} 2 * k_1 + 2 &= \text{mod}_{\mathcal{Z}_{\text{Jint}}}(2 * k_1) + 2 \\ &= \text{mod}_{\mathcal{Z}_{\text{Jint}}}(2 * k_1 + 2) \\ &= \text{mod}_{\mathcal{Z}_{\text{Jint}}}(2 * (k_1 + 1)) \\ &= 2 * \text{mod}_{\mathcal{Z}_{\text{Jint}}}(k_1 + 1) = 2 * (k_1 + 1) \end{aligned}$$

Für $k_2 := k_1 + 1$ gilt also die Behauptung.

(b) in \mathcal{Z} : Die Auswertung von ψ_b in \mathcal{Z} ergibt die Bedingung:

$$\text{Für alle } x \in \mathbb{Z} \text{ mit } x > 0 \text{ gilt } 2 \stackrel{\mathbb{Z}}{*} x > x .$$

Wegen der der Verträglichkeit von $\stackrel{\mathbb{Z}}{*}$ mit der Addition in \mathbb{Z} folgt aus $x > 0$, dass $x \stackrel{\mathbb{Z}}{+} x > x + 0$. Damit gilt ψ_b in \mathcal{Z} .

in $\mathcal{Z}_{\text{Jint}}$: Die Auswertung von ψ_b in $\mathcal{Z}_{\text{Jint}}$ ergibt die Bedingung

$$\text{Für alle } \mathbb{Z}_{\text{Jint}} \ni x > 0 \text{ gilt } x \stackrel{J}{+} x > x$$

$$\text{Für } x = \text{MAXINT} \text{ gilt } x \stackrel{J}{+} x = \text{mod}_{\mathbb{Z}_{\text{Jint}}}((2^{31} - 1) \stackrel{\mathbb{Z}}{+} (2^{31} - 1)) = \text{mod}_{\mathbb{Z}_{\text{Jint}}}(2^{32} - 2) = -2.$$

Also ist $x \stackrel{J}{+} x = -2 \not> x$, ψ_b ist also nicht erfüllt in $\mathcal{Z}_{\text{Jint}}$.

(c) in \mathcal{Z} : Die Auswertung von ψ_c in \mathcal{Z} ergibt die Bedingung

$$\text{Es gibt ein } x \in \mathbb{Z}, \text{ so dass für alle } y \in \mathbb{Z} \text{ gilt } x \leq y.$$

Zu einem beliebigen $x \in \mathbb{Z}$ ist aber $x - 1$ eine ganze Zahl und echt kleiner als x . Somit ist ψ_c in \mathcal{Z} nicht erfüllt.

in $\mathcal{Z}_{\text{Jint}}$: Die Auswertung von ψ_c in $\mathcal{Z}_{\text{Jint}}$ ergibt die Bedingung

$$\text{Es gibt ein } x \in \mathbb{Z}_{\text{Jint}}, \text{ so dass für alle } y \in \mathbb{Z}_{\text{Jint}} \text{ gilt } x \leq y.$$

$x = \text{MININT}$ ist das minimale Element, das dies erfüllt.

Aufgabe 2

Geben Sie für jede der folgenden Formeln an, ob sie erfüllbar, allgemeingültig, unerfüllbar oder keine Formel der Prädikatenlogik erster Stufe ist. Begründen Sie Ihre Entscheidungen.

- (a) $\phi_a = \exists x \neg(\forall x(f(x) \doteq f(x)))$
- (b) $\phi_b = \forall x(f(x) \doteq c) \rightarrow f(f(f(c))) \doteq c$
- (c) $\phi_c = \forall x(\forall y(p(x) \vee \neg p(y)))$
- (d) $\phi_d = \forall x((p(x) \doteq \mathbf{1} \wedge p(x) \doteq q(x)) \rightarrow q(x) \doteq \mathbf{1})$
- (e) $\phi_e = ((r \rightarrow s) \rightarrow r) \rightarrow (r \rightarrow (s \rightarrow r))$

Bemerkung: p, q, r, s sind Prädikatssymbole, f, g Funktionssymbole (jeweils mit der richtigen Stelligkeit), c ein Konstantensymbol (nullstelliges Funktionssymbol) und x, y sind Variablen. Eine Formel kann mehr als eine der genannten Eigenschaften haben.

Lösung zu Aufgabe 2

- (a) $\exists x \neg(\forall x(f(x) \doteq f(x)))$ $a \doteq a$ ist für jeden Term a immer wahr
 $\equiv \exists x \neg(\forall x(\mathbf{1}))$ die gebundene Variable x tritt nicht auf
 $\equiv \exists x \neg(\mathbf{1})$ die gebundene Variable x tritt nicht auf
 $\equiv \neg \mathbf{1} \equiv \mathbf{0}$ Die Formel ist also **unerfüllbar**

(b) Sei (D, I) eine beliebige Interpretation und β eine beliebige Variablenbelegung.

$$\begin{aligned} & \text{val}_{I,\beta}(\forall x(f(x) \doteq c)) = W \\ \iff & \text{Für alle } d \in D \text{ gilt } \text{val}_{I,\beta_x^d}(f(x) \doteq c) = W \\ \implies & \text{val}_{I,\beta_x^{\text{val}_{I,\beta}(f(c))}}(f(x) \doteq c) = W \\ \iff & I(f)(\text{val}_{I,\beta}(f(c))) = I(c) \\ \iff & \text{val}_{I,\beta}(f(f(c)) \doteq c) = W \end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned} & \text{val}_{I,\beta}(\forall x(f(x) \doteq c)) = W \implies \text{val}_{I,\beta}(f(f(c)) \doteq c) = W \\ \iff & \text{val}_{I,\beta}(\phi_b) = W \end{aligned}$$

Also ist ϕ_b *allgemeingültig*. Jede allgemeingültige Formel ist aber auch insbesondere *erfüllbar*.

(c) Da in ϕ_c die gebundenen Variablen nur in jeweils einem der Operanden der Disjunktion auftreten, gilt nach Satz 4.47:

$$\phi_c \equiv (\forall x p(x)) \vee (\forall y \neg p(y)) =: \phi'_c$$

Wir zeigen zunächst die Erfüllbarkeit von ϕ'_c . Sei $D = \{d_1\}$ ein einelementiges Universum und $I(p) = \{d_1\}$. Die einzig mögliche Variablenbelegung β ist dann $\beta(v) = d_1$ für alle $v \in \text{Var}$ und damit

$$\begin{aligned} & d_1 \in I(p) \\ \implies & \text{val}_{I,\beta}(p(x)) = W \\ \implies & \text{val}_{I,\beta}(\forall x p(x)) = W \text{ weil das die einzig mögliche Var-Belegung ist} \\ \implies & \text{val}_{I,\beta}(\forall x p(x) \vee \forall y \neg p(y)) = W \\ \implies & \text{val}_{I,\beta}(\phi'_c) = W \end{aligned}$$

Damit ist gezeigt, dass ϕ_c in (D, I) erfüllt ist.

Umgekehrt gilt für $D' = \{d_1, d_2\}$, $I'(p) = \{d_1\}$, und β' eine beliebige Var-Belegung, dass

$$\begin{aligned} & d_2 \notin I(p) \text{ und } d_1 \in I(p) \\ \implies & \text{val}_{I,\beta}(\forall x p(x)) = F \text{ und } \text{val}_{I,\beta}(\forall y \neg p(y)) = F \\ \implies & \text{val}_{I,\beta}(\phi'_c) = F \end{aligned}$$

Damit ist gezeigt, dass ϕ'_c in (D', I') nicht erfüllt ist. ϕ_c ist also erfüllbar, aber nicht allgemeingültig.

(d) Dies ist keine prädikatenlogische Formel nach unserer Definition. Links und rechts des Gleichheitszeichens \doteq müssen bei uns Terme und nicht Formeln stehen. Das „Gleichheitszeichen“ für Formeln ist \leftrightarrow .

Bemerkung: Die modifizierte Formel $\forall x(((p(x) \leftrightarrow \mathbf{1}) \wedge (p(x) \leftrightarrow q(x))) \rightarrow (q(x) \leftrightarrow \mathbf{1}))$ ist dann allgemeingültig.

(e) Da r und s nullstellige Prädikate – also aussagenlogische Variablen – sind, handelt es sich auch um eine AL-Formel (AL ist in PL enthalten!). Diese Formel lässt sich also mit den Mitteln, die wir in der AL verwendet haben, untersuchen, z.B. einer Wertetabelle.

Man kann auch eine geschickte Fallunterscheidung machen. Wenn $I(r) = W$ gewählt wird, so kann man die rechte Seite zu $\mathbf{1}$ vereinfachen. Die Formel ϕ_e ist also wahr, wenn r wahr ist. Wenn man $I(r) = F$ wählt, so stellt man fest, dass die linke Seite zu $\mathbf{0}$ vereinfacht werden kann. Die Formel ϕ_e ist also auch wahr, wenn r falsch ist.

Dies zeigt, dass die Formel aussagenlogisch allgemeingültig ist, also eine **Tautologie** ist. (Damit ist sie auch erfüllbar.)

Aufgabe 3

Zu einer prädikatenlogischen Formel G in Pränexnormalform bezeichne G_{sko} die durch Skolemisierung (genauer: durch wiederholte Anwendung von Lemma 4.61 im Skriptum) aus G konstruierte Formel in Skolem-Normalform.

- (a) Geben Sie (ohne Beweis) jeweils eine prädikatenlogische Formel G in Pränexnormalform an, so dass Folgendes gilt:
- (i) $\neg G_{\text{sko}} \wedge G$ ist erfüllbar,
 - (ii) $\neg G_{\text{sko}} \wedge G$ ist unerfüllbar,
 - (iii) $G \rightarrow G_{\text{sko}}$ ist nicht allgemeingültig.
- (b) Zeigen Sie, dass $G_{\text{sko}} \rightarrow G$ für alle prädikatenlogischen Formeln G in Pränexnormalform allgemeingültig ist.

Lösung zu Aufgabe 3

- (a) (i) $G = \exists x(p(x))$, denn $G_{\text{sko}} = p(c)$ und $\neg p(c) \wedge \exists x(p(x))$ ist erfüllbar.
Ein Modell ist $\mathcal{D} = (\{a, b\}, I(p) = \{a\}, I(c) = b)$
- (ii) Z.B. $G = p = G_{\text{sko}}$ (mit p 0-stelliges Prädikat). Für jede variablenfreie Formel G gilt $G = G_{\text{sko}}$, also insbesondere auch $\neg G_{\text{sko}} \wedge G = \neg G \wedge G \equiv \mathbf{0}$.
- (iii) $G = \exists x(p(x))$, denn $G_{\text{sko}} = p(c)$ und $G \rightarrow G_{\text{sko}} \equiv \exists x(p(x)) \rightarrow p(c)$. Die Interpretation $\mathcal{D} = (\{a, b\}, I(p) = \{a\}, I(c) = b)$ ist z. B. kein Modell von $G \rightarrow G_{\text{sko}}$.
- (b) Sei G obdA in Pränexnormalform und die gebundenen Variablen verschieden. Lemma 4.36 im Skript besagt:

Sei Σ eine Signatur, \mathcal{D} eine Interpretation für Σ , β eine Belegung und σ eine für A kollisionsfreie Substitution mit $\sigma(y) = y$ für alle Variablen $y \neq x$, dann gilt:

$$\text{val}_{\mathcal{D},\beta}(\sigma(A) \rightarrow \exists x A) = W$$

Sei n die Anzahl der Existenzquantoren in G . Die Formel G_{sko} wird durch n Skolemisierungsschritte aus G gewonnen. Seien G_0, \dots, G_n die Zwischenschritte mit $G_0 = G$ und $G_n = G_{\text{sko}}$.

Betrachten wir nun den allgemeinen Schritt $G_i \rightsquigarrow G_{i+1}$ für $0 \leq i < n$.

Jedes G_i ist von der Form $G_i = \forall x_1 \dots \forall x_{l_i} \exists x \varphi_i$ mit $l_i \geq 0$ voranstehenden Allquantoren für ein geeignetes φ_i .

Für G_{i+1} gilt nach der Skolemisierung von x : $G_{i+1} = \forall x_1 \dots \forall x_{l_i} \sigma(\varphi_i)$ wobei $\sigma(x) = f_i(x_1, \dots, x_{l_i})$ für eine neue Skolemfunktion f_i ist. σ entspricht auf den Variablen verschieden von x der Identität und ist wegen der Annahme über die Variablen kollisionsfrei.

Damit sind die Voraussetzungen von Lemma 4.36 erfüllt und es gilt, dass $\sigma(\varphi) \rightarrow \exists x \varphi$ allgemeingültig ist.

Wegen (mehrfacher Anwendung) des Lemmas unten gilt auch $(G_i)_{\text{sko}} = G_{i+1} \rightarrow G_i$ ist allgemeingültig. Mit der Transitivität von \rightarrow folgt: $G_n \rightarrow G_0$ ist allgemeingültig. \square

Lemma: Wenn $A \rightarrow B$ allgemeingültig ist, dann ist auch $\forall x A \rightarrow \forall x B$ allgemeingültig.

Beweis: Sei (D, I) eine Interpretation und β eine Variablenbelegung, $A \rightarrow B$ allgemeingültig und gelte $\text{val}_{(I,\beta)}(\forall x A) = W$. Dann ist zu zeigen, dass $\text{val}_{(I,\beta)}(\forall x B) = W$.

Es gilt, dass $\text{val}_{(I,\beta^d)}(A) = W$ für alle $d \in D$ und wegen der Allgemeingültigkeit von $A \rightarrow B$ damit auch $\text{val}_{(I,\beta^d)}(B) = W$ für alle d . Das wiederum impliziert $\text{val}_{(I,\beta)}(\forall x B) = W$. \square

Aufgabe 4

Berechnen Sie für die prädikatenlogischen Formeln (a) und (b) zunächst die Pränex-Normalform und dann die Skolem-Normalform.

(a) $(\forall x p(x) \rightarrow \forall x q(x)) \rightarrow \forall x(p(x) \rightarrow q(x))$

(b) $\exists x(\forall y p(x, y) \vee \exists z(p(x, z) \wedge \forall x p(z, x)))$

(c) Geben Sie eine Skolem-Normalform für (a) an, die sich von Ihrer Lösung zu (a) nicht nur durch Umbenennung und Äquivalenzumformung unterscheidet.

Lösung zu Aufgabe 4

Es gilt im Allgemeinen $G \equiv G_{\text{sko}}$ **nicht**, wie uns Aufgabe 1 zeigte.

Es gibt verschiedene unterschiedliche Lösungen für diese Aufgaben, aber man sollte immer versucht sein, Skolemsymbole mit möglichst wenig Argumenten zu erzeugen, weil das nachfolgende Beweise effizienter gestalten lässt (weniger Unifikation notwendig!).

(a) Überführen in Pränex-Normalform

$$\begin{aligned} & (\forall x p(x) \rightarrow \forall x q(x)) \rightarrow \forall x(p(x) \rightarrow q(x)) \\ \equiv & (\forall x_1 p(x_1) \rightarrow \forall x_2 q(x_2)) \rightarrow \forall x_3(p(x_3) \rightarrow q(x_3)) && \text{Umbenennen der gebundenen Variablen} \\ \equiv & (\forall x_2 \exists x_1(p(x_1) \rightarrow q(x_2))) \rightarrow \forall x_3(p(x_3) \rightarrow q(x_3)) && \text{Innere Quantoren aus der Implikation ziehen} \\ & \hspace{10em} \text{Dabei erweist es sich als sinnvoll, } x_2 \text{ vor } x_1 \text{ zu setzen} \\ \equiv & \exists x_2 \forall x_1 \forall x_3((p(x_1) \rightarrow q(x_2)) \rightarrow (p(x_3) \rightarrow q(x_3))) && \text{Alle Quantoren nach außen} \\ \equiv & \exists x_2 \forall x_1 \forall x_3((p(x_1) \wedge \neg q(x_2)) \vee \neg p(x_3) \vee q(x_3)) && \text{Matrix in } \dots \\ \equiv & \exists x_2 \forall x_1 \forall x_3((p(x_1) \vee \neg p(x_3) \vee q(x_3)) \wedge \dots \\ & \dots \wedge (\neg q(x_2) \vee \neg p(x_3) \vee q(x_3))) && \dots \text{KNF überführen} \end{aligned}$$

Skolemisieren: für x_2 wird eine Konstante c eingeführt.

$$\forall x_1 \forall x_3((p(x_1) \vee \neg p(x_3) \vee q(x_3)) \wedge (\neg q(c) \vee \neg p(x_3) \vee q(x_3)))$$

(b) Überführen in Pränex-Normalform

$$\begin{aligned} & \exists x(\forall y p(x, y) \vee \exists z(p(x, z) \wedge \forall x p(z, x))) \\ \equiv & \exists x(\forall y p(x, y) \vee \exists z(p(x, z) \wedge \forall w p(z, w))) && \text{Umbenennen gebundener Variablen} \\ \equiv & \exists x \exists z \forall y \forall w(p(x, y) \vee (p(x, z) \wedge p(z, w))) && \text{Herausziehen der Quantoren} \\ \equiv & \exists x \exists z \forall y \forall w((p(x, y) \vee p(x, z)) \wedge (p(x, y) \vee p(z, w))) && \text{Matrix in KNF} \end{aligned}$$

Skolemisieren: für x wird eine Konstante c eingeführt und für z die Konstante d .

$$\forall y \forall w((p(c, y) \vee p(c, d)) \wedge (p(c, y) \vee p(d, w)))$$

(c) Nach der Umbenennung der Variablen (siehe (a)) können die Quantoren auch in anderer Reihenfolge behandelt werden:

$$\begin{aligned} & (\forall x_1 p(x_1) \rightarrow \forall x_2 q(x_2)) \rightarrow \forall x_3(p(x_3) \rightarrow q(x_3)) \\ \equiv & \forall x_3((\forall x_1 p(x_1) \rightarrow \forall x_2 q(x_2)) \rightarrow (p(x_3) \rightarrow q(x_3))) && \text{Ziehe } x_3 \text{ zuerst heraus} \\ \equiv & \forall x_3((\exists x_1 \forall x_2(p(x_1) \rightarrow q(x_2))) \rightarrow (p(x_3) \rightarrow q(x_3))) && \text{Innere Quantoren aus der Implikation ziehen} \\ \equiv & \dots && \text{s.o.} \\ \equiv & \forall x_3 \forall x_1 \exists x_2((p(x_1) \vee \neg p(x_3) \vee q(x_3)) \wedge \dots \\ & \dots \wedge (\neg q(x_2) \vee \neg p(x_3) \vee q(x_3))) \end{aligned}$$

Skolemisieren: für x_2 wird eine Funktion f eingeführt, die als Argument die freien Variablen x_3 und x_1 erhält:

$$\forall x_1 \forall x_3 ((p(x_1) \vee \neg p(x_3) \vee q(x_3)) \wedge (\neg q(f(x_3, x_1)) \vee \neg p(x_3) \vee q(x_3)))$$

Diese Lösung ist strukturell (nicht nur durch Umbenennung!) verschieden von der Lösung in (a), weil die Skolemfunktion 2 statt keinem Argument erhält.

Aufgabe 5

Finden Sie eine Formel φ der Prädikatenlogik erster Stufe mit leeren Vokabular, so daß $M \models \varphi$ genau dann gilt, wenn M genau drei Elemente hat. Die Formel φ enthält also als einziges Relationszeichen das Symbol \doteq für die Gleichheit.

Lösung zu Aufgabe 5

Vorbemerkung: Das Symbol \models ist überladen: $M \models \varphi$ kann bedeuten, dass eine Formel φ logische Konsequenz einer Menge M von Formeln ist; und es kann bedeuten, dass eine Interpretation M Modell einer Formel φ ist (φ ist wahr in M). In dieser Aufgabe ist letztere Bedeutung gemeint.

Wir wollen durch eine Formel φ festlegen, dass die eine Interpretation, die Modell ist, *genau* drei Elemente hat, d.h. *wenigstens* drei und *höchstens* drei Elemente hat.

Wenigstens 3 Elemente ist äquivalent zu der Aussage: “Es gibt drei Elemente, die paarweise verschieden sind”, also:

$$\varphi_{\geq 3} := \exists x_1 \exists x_2 \exists x_3 (\neg x_1 \doteq x_2 \wedge \neg x_1 \doteq x_3 \wedge \neg x_2 \doteq x_3)$$

Höchstens 3 Elemente kann man äquivalent umformulieren zu: “Es gibt drei (möglicherweise identische) Elemente, so dass jedes Element gleich einem der drei ist”, also:

$$\varphi_{\leq 3} := \exists x_1 \exists x_2 \exists x_3 \forall y (y \doteq x_1 \vee y \doteq x_2 \vee y \doteq x_3)$$

Die Konjunktion $\varphi_{\geq 3} \wedge \varphi_{\leq 3}$ ist eine mögliche Lösung. Da die quantifizierten Variablen x_1, x_2, x_3 in beiden Formeln notwendigerweise dieselben drei Objekte beschreiben, können sie auch in eine Quantifizierung zusammengefasst werden (was ja i.A. nicht geht):

$$\exists x_1 \exists x_2 \exists x_3 (\neg x_1 \doteq x_2 \wedge \neg x_1 \doteq x_3 \wedge \neg x_2 \doteq x_3 \wedge \forall y (y \doteq x_1 \vee y \doteq x_2 \vee y \doteq x_3))$$