Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Theoretische Informatik
Prof. Dr. Bernhard Beckert
Dr. Thorsten Bormer, Dr. Vladimir Klebanov, Dr. Mattias Ulbrich

Formale Systeme, WS 2015/2016

Lösungen zu Übungsblatt 8

Dieses Übungsblatt wurde in der Übung am 18.12.2015 besprochen.

Aufgabe 1

Zeigen Sie die Unerfüllbarkeit der folgenden Klauselmenge mittels des Resolutionskalküls:

$$\{ \quad \{p(x_1, f(x_1))\}, \quad \{\neg p(x_2, x_3), \neg p(x_3, x_4), p(x_2, x_4)\}, \quad \{p(g(d), x_8)\},$$
$$\{\neg p(c, c), \neg p(d, g(x_7))\}, \quad \{p(x_5, x_6), \neg p(x_6, x_5)\} \quad \}$$

Darin sind p ein zweistelliges Prädikatensymbol, $x_1, \ldots, x_8$ Variablen, f, g einstellige Funktionssymbole und c, d Symbole für konstante Funktionen.

Geben Sie für alle Resolutionsschritte den verwendeten Unifikator an.

Lösung zu Aufgabe 1

Nummeriere die gegebenen Klauseln (1) bis (5).

(6)	$\{\neg p(f(x_1), x_4), p(x_1, x_4)\}$	[1, 2]	$\mu = \{x_2/x_1, x_3/f(x_1)\}$
(7)	$\{p(f(x_1), x_1)\}$	[1, 5]	$\mu = \{x_5/f(x_1), x_6/x_1\}$
(8)	$\{p(x_1, x_1)\}$	[6, 7]	$\mu = \{x_4/x_1\}$
(9)	$\{\neg p(d, g(x_7))\}$	[8, 4]	$\mu = \{x_1/c\}$
(10)	$\{\neg p(g(x_7, d))\}$	[9, 5]	$\mu = \{x_5/d, x_6/g(x_7)\}$
(11)	$\square$	[10, 3]	$\mu = \{x_8/d, x_7/d\}$

Hinweis: Es ist hilfreich, wenn man in einigen Klauseln Struktur erkennt: Klausel (2) besagt, dass p transitiv ist und (5), dass p symmetrisch ist. Dies kann man verwenden, um $p(x, x)$ zu resolvieren. Eine zweite Anwendung der Symmetrie sorgt dann für den endgültigen Abschluss.

Aufgabe 2

Zeigen Sie die Unerfüllbarkeit der folgenden Klauselmenge mittels des Resolutionskalküls *in vier Resolutionsschritten*:

$$\{\{p(a)\}, \quad \{\neg p(x), p(f(x))\}, \quad \{\neg p(f(f(f(f(a)))))\}\}$$

Geben Sie für alle Resolutionsschritte den verwendeten Unifikator an.

Lösung zu Aufgabe 2

Die kürzeste Ableitung ergibt sich durch Selbstresolution:

(1)	$\{p(a)\}$	
(2)	$\{\neg p(x), p(f(x))\}$	
(3)	$\{\neg p(f(f(f(f(a)))))\}$	
(4)	$\{\neg p(y), p(f(f(y)))\}$	$[2, 2, \mu = \{x/f(y)\}]$
(5)	$\{\neg p(z), p(f(f(f(f(z)))))\}$	$[4, 4, \mu = \{y/f(f(z))\}]$
(6)	$\{\neg p(a)\}$	$[3, 5, \mu = \{z/a\}]$
(7)	$\square$	$[1, 6, \mu = \{\}]$

Aufgabe 3

Es sei eine prädikatenlogische Signatur gegeben, die die einstelligen Prädikatensymbole p, q und r enthält und das einstellige Funktionssymbol f. Zeigen Sie mit Hilfe des prädikatenlogischen Resolutionskalküls, dass die Formel

$$\big((\forall x\ p(x)) \to (\forall x\ q(x))\big) \land \big(\forall x(q(x) \to r(x))\big) \to \big(\exists x(p(x) \to r(f(x)))\big)$$

allgemeingültig ist.

Lösung zu Aufgabe 3

Um eine Formel mit dem Resolutionskalkül als allgemeingültig zu beweisen, geht man folgendermaßen vor:

1. negieren der Formel
2. überführen der Formel in Pränexnormalform, Matrix in konjunktiver Form.
3. skolemisieren
4. resolvieren

Negieren und Überführen in PNF Nach einigen ereinfachenden Äquivalenzumformungen ist das Negat

$$\begin{aligned} &\big((\forall x_1\ p(x_1)) \to (\forall x_2\ q(x_2))\big) \\ \land\ &\big(\forall x_3(q(x_3) \to r(x_3))\big) \\ \land\ &\big(\forall x_4(\neg r(f(x_4)) \land p(x_4))\big) \end{aligned}$$

Wenn die Quantoren herausgezogen sind, lautet die Formel in PNF:

$$\begin{aligned} \exists x_1 \forall x_2 \forall x_3 \forall x_4 \quad &\big(\neg p(x_1) \lor q(x_2)\big) \\ \land\ &\big(\neg q(x_3) \lor r(x_3)\big) \\ \land\ &\big(\neg r(f(x_4)) \land p(x_4)\big) \end{aligned}$$

Skolemisieren Die Skolemisierung führt ein neues Funktionssymbol c für x_1 ein. Die erfüllbarkeitsäquivalente Formel lautet nun:

$$\begin{aligned} &\big(\neg p(c) \lor q(x_2)\big) \\ \land\ &\big(q(x_3) \lor r(x_3)\big) \\ \land\ &\neg r(f(x_4)) \quad \land \quad p(x_4) \end{aligned}$$

wobei die Allquantoren als implizit angenommen und daher weggelassen wurden.

Resolution Die Ausgangs-Klauselmenge lautet nun:

1. $\{\neg p(c), q(x_2)\}$
2. $\{\neg q(x_3), r(x_3)\}$
3. $\{\neg r(f(x_4))\}$
4. $\{p(x_4)\}$

Weitere Resolution ergibt:

5.	$\{q(x_2)\}$	1,4	$\sigma = \{x_4/c\}$
6.	$\{r(x_3)\}$	5,2	$\sigma = \{x_2/x_4\}$
7.	$\square$	6,3	$\sigma = \{x_4/f(x_4)\}$

Aufgabe 4

Betrachten wir – nur für diese Übungsaufgabe – die folgende geänderte Version der Definition von $Res(M)$ aus Definition 5.17 im Skript:

$$Res'(M) = \ \{B \mid \text{ es gibt Klauseln } C_1, C_2 \text{ aus } M, \text{ so dass } B \text{ eine Resolvente von } C_1, C_2 \text{ ist.}\}$$

Gegenüber der offiziellen Definition ist die Variantenbildung, d.h. die Umbennung der Variablen in C_1, C_2, weggefallen. Wie wird dadurch Korrektheit und Vollständigkeit des Kalküls beeinflußt? Geben Sie ein Beispiel an, das dies belegt.

Lösung zu Aufgabe 4

Wegen $Res'(M) \subseteq Res(M)$ ist der modifizierte Kalkül auf jeden Fall noch korrekt. Er ist aber nicht mehr vollständig. Die Formelmenge $\{\forall x(p(x, f(x))), \neg\exists x(p(a, x))\}$ ist sicherlich unerfüllbar. Nach Umwandlung in Klauselnormalform erhalten wir $\{\{p(x, f(x))\}, \{\neg p(a, x)\}\}$. Die beiden Einerklauseln $\{p(x, f(x))\}$, $\{\neg p(a, x)\}$ sind allerdings nicht resolvierbar, da die Unifikation von x mit $f(x)$ in der zweiten Argumentstelle von p nicht möglich ist. Dagegen liefert die Resolution von $\{p(x, f(x))\}$ mit $\{\neg p(a, y)\}$ sofort die leere Klausel.