Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Theoretische Informatik
Prof. Dr. Bernhard Beckert
Dr. Thorsten Bormer, Dr. Vladimir Klebanov, Dr. Mattias Ulbrich

Formale Systeme, WS 2015/2016

Lösungen zu Übungsblatt 9

Dieses Übungsblatt wurde in der Übung am 08.01.2016 besprochen.

Aufgabe 1

Zeigen Sie oder widerlegen Sie mithilfe des Tableaukalküls für die Aussagenlogik die Allgemeingültigkeit folgender Formeln. Falls eine der Formeln nicht allgemeingültig ist, geben Sie eine erfüllende Belegung ihres Negats als Gegenbeispiel an.

(a) $((A \to B) \to C) \to (B \to C)$

(b) $(B \to C) \to ((A \to B) \to C)$

Lösung zu Aufgabe 1

Abbildung 1 zeigt Tableaubeweise für beide Teilaufgaben. Das Tableau für Teilaufgabe (a) lässt sich schließen, die Allgemeingültigkeit der Formel φ_a ist damit bewiesen.

Das Tableau für die Formel $\neg\varphi_b$ lässt sich auch im erschöpften Zustand nicht schließen, daher ist $\neg\varphi_b$ erfüllbar, φ_b also nicht allgemeingültig.

Die Abbildungen sind mit der Vorzeichen-Variante des Kalküls aus der Vorlesung erstellt und die Regelanwendungen darin markiert. Dabei steht eine rote Kante für eine α- und eine blaue für eine β-Erweiterung. Die jeweils letzten Formeln im Tableau von (b) gehen aus der β-Formel $1B \to C$ hervor.

Ein erschöpftes, nicht geschlossenes Tableau hat einen Ast, der nicht geschlossen werden kann. Dieser Erlaubt das Ablesen einer Interpretation, die die Wurzelformel erfüllt: Setze für jede Variable $P \in \Sigma$

- wenn $0P$ auf dem Ast vorkommt $I(P) := F$,
- wenn $1P$ auf dem Ast vorkommt $I(P) := W$.
- andernfalls $I(P)$ beliebig.

Zur Begründung siehe Lemma 3.34 im Skript.

Insbesondere wird die Wurzel des Baumes erfüllt, das Negat der Formel, die auf Allgemeingültigkeit überprüft werden soll. Für diese Formel ist die Belegung also ein Gegenbeispiel zur Allgemeingültigkeit.

Für (b) ist das der Fall für die Belegung I mit $I(A) = I(B) = I(C) = F$. Denn dann gilt: $\mathrm{val}_I(\phi_b) = F$.

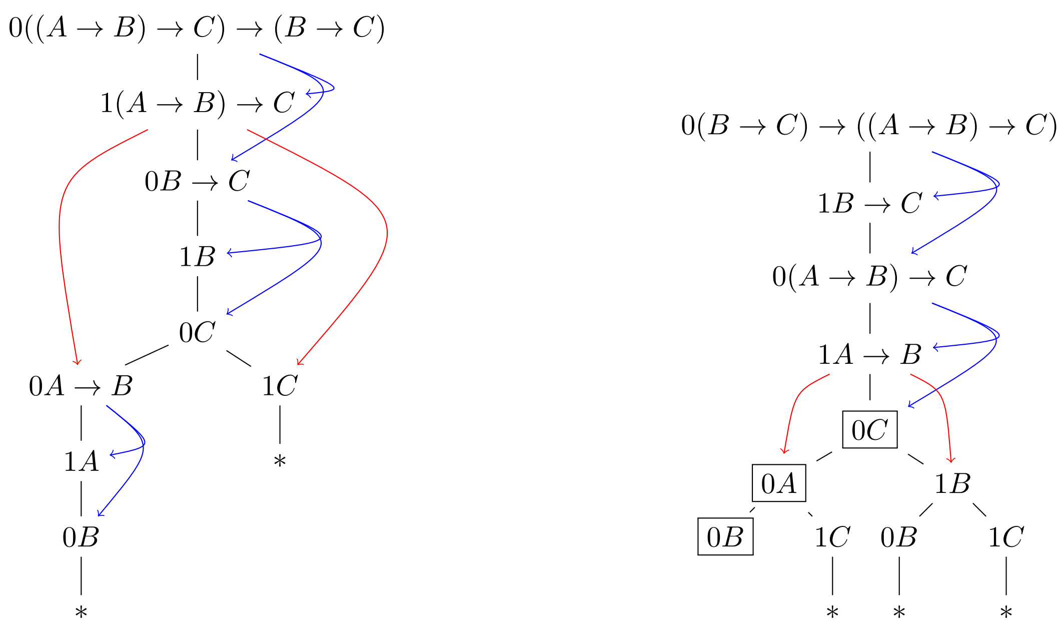

Abbildung 1: Tableaubeweise zu Aufgabe 1(a) (links) und 1(b) (rechts)

Aufgabe 2

Das folgende Rätsel stammt aus dem Buch "To Mock a Mockingbird – and Other Logic Puzzles" von Raymond Smullyan.

Der Verein der Barbiere unterliegt folgenden Regeln:

1. Wenn ein Mitglied A ein Mitglied B rasiert – dabei spielt es keine Rolle, ob A ungleich B ist – dann rasieren alle Mitglieder auch A.
2. Vier der Mitglieder sind: Guido, Lorenzo, Petrucio und Cesare.
3. Guido rasiert Cesare.

Zeigen sie, dass aus diesen Regeln folgt:

4. Petrucio rasiert Lorenzo.

(a) Formalisieren Sie 1.–4. in Prädikatenlogik. Die Domäne sei die Menge aller Personen.

Verwenden Sie dazu

- das einstellige Prädikatsymbol $m(\cdot)$ mit der Bedeutung $I(m(X)) = W$ gdw. X Mitglied des Clubs ist.
- das zweistellige Prädikatsymbol $r(\cdot, \cdot)$ mit der Bedeutung $I(r(X, Y)) = W$ gdw. Person X Person Y rasiert.
- die Konstanten g, l, p, c für die Bezeichnung der Barbiere Guido, Lorenzo, Petrucio und Cesare.

(b) Zeigen sie mit Hilfe des Tableaukalküls der Prädikatenlogik, dass aus den Formeln zu 1.–3. die Aussage 4. folgt.

Lösung zu Aufgabe 2

Die Formalisierung der Regeln ergibt:

1. Wenn ein Mitglied A ein Mitglied B rasiert – dabei spielt es keine Rolle, ob A ungleich B ist – dann rasieren alle Mitglieder auch A.

$$A_1 \equiv \forall x \forall y \ ((m(x) \land m(y) \land r(x, y)) \to \forall z \ (m(z) \to r(z, x)))$$

2. Vier der Mitglieder sind: Guido, Lorenzo, Petrucio und Cesare.

$$A_2 \equiv m(g) \land m(l) \land m(p) \land m(c)$$

3. Guido rasiert Cesare.

$$A_3 \equiv r(g, c)$$

4. Petrucio rasiert Lorenzo.

$$C \equiv r(p, l)$$

$1\ \forall x.\forall y.((m(x) \land (m(y) \land r(x,y))) \to \forall z.(m(z) \to r(z,x)))\ {}_{1}$

$1\ (m(g) \land (m(l) \land (m(p) \land m(c))))\ {}_{2}$

$1\ r(g,c)\ {}_{3}$

$0\ r(p,l)\ {}_{4}$

$1\ m(g)\ {}_{5[\alpha(2)]}$

$1\ (m(l) \land (m(p) \land m(c)))\ {}_{6[\alpha(2)]}$

$1\ m(l)\ {}_{7[\alpha(6)]}$

$1\ (m(p) \land m(c))\ {}_{8[\alpha(6)]}$

$1\ m(p)\ {}_{9[\alpha(8)]}$

$1\ m(c)\ {}_{10[\alpha(8)]}$

$1\ \forall y.((m(X_1) \land (m(y) \land r(X_1,y))) \to \forall z.(m(z) \to r(z,X_1)))\ {}_{11[\gamma(1)]}$

$1\ ((m(X_1) \land (m(X_2) \land r(X_1,X_2))) \to \forall z.(m(z) \to r(z,X_1)))\ {}_{12[\gamma(11)]}$

$0\ (m(X_1) \land (m(X_2) \land r(X_1,X_2)))\ {}_{13[\beta(12)]}$ $\quad$ $1\ \forall z.(m(z) \to r(z,X_1))\ {}_{14[\beta(12)]}$

$0\ m(X_1)\ {}_{15[\beta(13)]}$ $\quad$ $0\ (m(X_2) \land r(X_1,X_2))\ {}_{16[\beta(13)]}$ $\quad$ $1\ (m(X_3) \to r(X_3,X_1))\ {}_{19[\gamma(14)]}$

$0\ m(X_2)\ {}_{17[\beta(16)]}$ $\quad$ $0\ r(X_1,X_2)\ {}_{18[\beta(16)]}$ $\quad$ $0\ m(X_3)\ {}_{20[\beta(19)]}$ $\quad$ $1\ r(X_3,X_1)\ {}_{21[\beta(19)]}$

$1\ \forall y.((m(X_4) \land (m(y) \land r(X_4,y))) \to \forall z.(m(z) \to r(z,X_4)))\ {}_{22[\gamma(1)]}$

$1\ ((m(X_4) \land (m(X_5) \land r(X_4,X_5))) \to \forall z.(m(z) \to r(z,X_4)))\ {}_{23[\gamma(22)]}$

$0\ (m(X_4) \land (m(X_5) \land r(X_4,X_5)))\ {}_{24[\beta(23)]}$ $\quad$ $1\ \forall z.(m(z) \to r(z,X_4))\ {}_{25[\beta(23)]}$

$0\ m(X_4)\ {}_{26[\beta(24)]}$ $\quad$ $0\ (m(X_5) \land r(X_4,X_5))\ {}_{27[\beta(24)]}$ $\quad$ $1\ (m(X_6) \to r(X_6,X_4))\ {}_{30[\gamma(25)]}$

$0\ m(X_5)\ {}_{28[\beta(27)]}$ $\quad$ $0\ r(X_4,X_5)\ {}_{29[\beta(27)]}$ $\quad$ $0\ m(X_6)\ {}_{31[\beta(30)]}$ $\quad$ $1\ r(X_6,X_4)\ {}_{32[\beta(30)]}$

Abbildung 2: Lösung zu Aufgabe 2

Zu beweisen ist: $\{A_1, A_2, A_3\} \models C$. Um dies mit Hilfe des Tableaukalküls nachzuweisen, zeigen wir $\{A_1, A_2, A_3\} \cup \neg C \vdash \mathbf{0}$

Abbildung 2 zeigt ein Tableau für $\{A_1, A_2, A_3\} \cup \neg C$.

Das Tableau aus Abb. 2 ist noch nicht geschlossen (damit die freien Variablen sichtbar bleiben). Durch die Substitution

$$\mu = \{X_1/g, X_2/c, X_3/l, X_4/l, X_5/g, X_6/p\}$$

kann es aber geschlossen werden.

Aufgabe 3

Zeigen Sie mit Hilfe des prädikatenlogischen Tableaukalküls, dass die Formel

$$\forall y \forall x \forall z \big((p(x,z) \rightarrow p(y,z)) \rightarrow q(x,y)\big) \land \neg \exists y \forall x (q(x,x) \lor r(y))$$

unerfüllbar ist.

Lösung zu Aufgabe 3

Ein geschlossenes Tableau zu der Vorzeichenformel

$$1\ \forall y \forall x \forall z \big((p(x,z) \rightarrow p(y,z)) \rightarrow q(x,y)\big) \land \neg \exists y \forall x (q(x,x) \lor r(y))$$

ist in in Abbildung 3 dargestellt. Die schließende Substitution ist dabei: $\{X_2 = f(X_1), X_3 = f(X_1)\}$

Aufgabe 4

Gegeben sei die Formel

$$F \quad = \quad ((\neg B \land \neg A) \lor C) \rightarrow ((\neg A \rightarrow B) \rightarrow C)$$

Zeigen Sie mithilfe des Sequenzenkalküls, dass F allgemeingültig ist.

Lösung zu Aufgabe 4

Der Wurzelknoten eines Sequenzenbeweises für eine Formel φ ist markiert mit " $\blacktriangleright \varphi$".

Wenn man die Regeln aus der Vorlesung/Skript anwendet, kommt man zu einem Beweisbaum ähnlich zu dem in Abbildung 4. Da alle Blätter des Beweises Axiome sind, ist die Ausgangsformel damit bewiesen.

Im Baum ist jeweils die Formel markiert, auf die die nachfolgende Regel angewendet wird.

$$1\ (\forall y.\forall x.\forall z.((p(x,z) \to p(y,z)) \to q(x,y)) \wedge \neg\exists y.\forall x.(q(x,x) \vee r(y)))\ {\scriptstyle 1}$$

$$1\ \forall y.\forall x.\forall z.((p(x,z) \to p(y,z)) \to q(x,y))\ {\scriptstyle 2[\alpha(1)]}$$

$$1\ \neg\exists y.\forall x.(q(x,x) \vee r(y))\ {\scriptstyle 3[\alpha(1)]}$$

$$0\ \exists y.\forall x.(q(x,x) \vee r(y))\ {\scriptstyle 4[\alpha(3)]}$$

$$0\ \forall x.(q(x,x) \vee r(X_1))\ {\scriptstyle 5[\gamma(4)]}$$

$$0\ (q(f(X_1),f(X_1)) \vee r(X_1))\ {\scriptstyle 6[\delta(5)]}$$

$$0\ q(f(X_1),f(X_1))\ {\scriptstyle 7[\alpha(6)]}$$

$$0\ r(X_1)\ {\scriptstyle 8[\alpha(6)]}$$

$$1\ \forall x.\forall z.((p(x,z) \to p(X_2^*,z)) \to q(x,X_2^*))\ {\scriptstyle 9[\gamma(2)]}$$

$$1\ \forall z.((p(X_3^*,z) \to p(X_2^*,z)) \to q(X_3^*,X_2^*))\ {\scriptstyle 10[\gamma(9)]}$$

$$1\ ((p(X_3^*,X_4) \to p(X_2^*,X_4)) \to q(X_3^*,X_2^*))\ {\scriptstyle 11[\gamma(10)]}$$

$$0\ (p(X_3^*,X_4) \to p(X_2^*,X_4))\ {\scriptstyle 12[\beta(11)]} \qquad\qquad 1\ q(X_3^*,X_2^*)\ {\scriptstyle 13[\beta(11)]}$$

$$* _{[7,13]}$$

$$1\ p(X_3^*,X_4)\ {\scriptstyle 14[\alpha(12)]}$$

$$0\ p(X_2^*,X_4)\ {\scriptstyle 15[\alpha(12)]}$$

$$* _{[14,15]}$$

Abbildung 3: Tableau für Aufg. 3

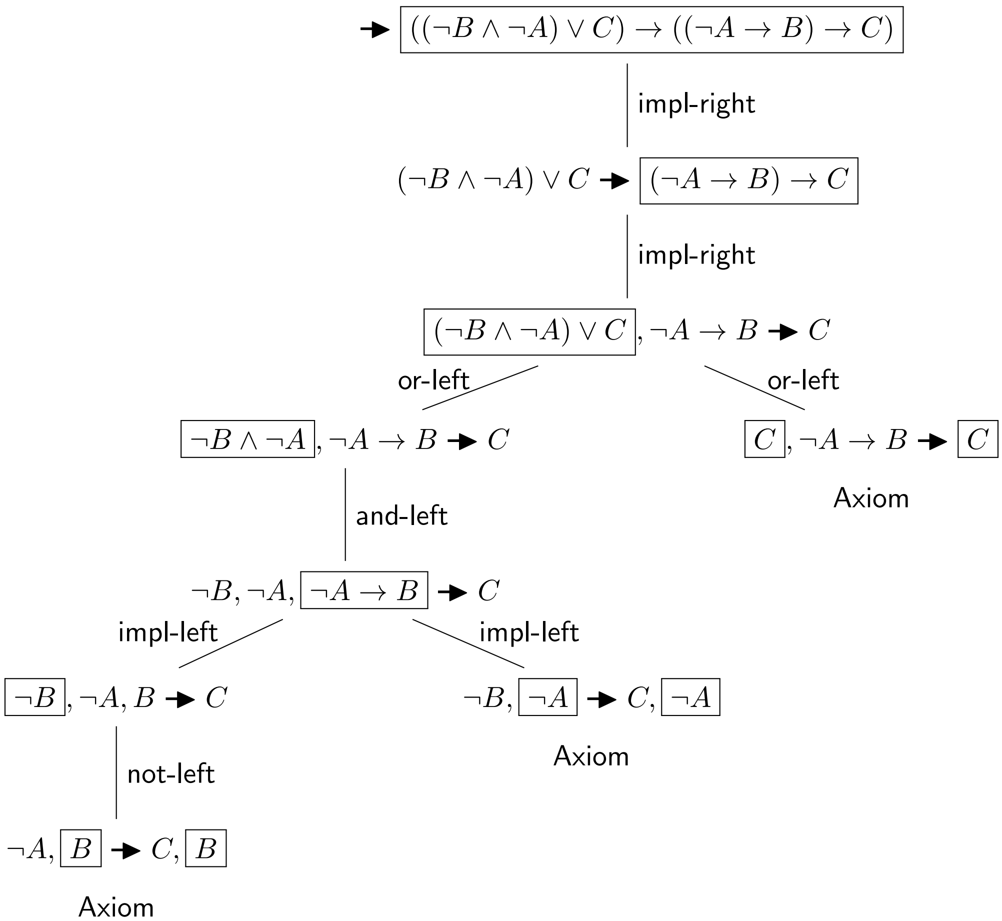

Abbildung 4: Sequenzenbeweisbaum zu Aufgabe 5