

Formale Systeme

Prof. Dr. Bernhard Beckert, WS 2016/2017

Aussagenlogik: Syntax und Semantik

KIT – INSTITUT FÜR THEORETISCHE INFORMATIK

Sudoku

5	3			7				
6			1	9	5			
	9	8					6	
8				6				3
4			8		3			1
7				2				6
	6					2	8	
			4	1	9			5
				8			7	9

5	3			7				
6			1	9	5			
	9	8					6	
8				6				3
4			8		3			1
7				2				6
	6					2	8	
			4	1	9			5
				8			7	9

Vervollständigen Sie das Sudoku so, dass

- ▶ in jeder der neun Spalten
- ▶ in jeder der neun Reihen
- ▶ und in jeder der neun Regionen

alle Zahlen von 1 bis 9 vorkommen.

5	3	4	6	7	8	9	1	2
6	7	2	1	9	5	3	4	8
1	9	8	3	4	2	5	6	7
8	5	9	7	6	1	4	2	3
4	2	6	8	5	3	7	9	1
7	1	3	9	2	4	8	5	6
9	6	1	5	3	7	2	8	4
2	8	7	4	1	9	6	3	5
3	4	5	2	8	6	1	7	9

Wir führen für jede Zellenposition (i, j) des Sudoku und jede Zahl k zwischen 1 und 9 eine Boolesche Variable

$$D_{i,j}^k$$

ein, mit der Vorstellung, dass $D_{i,j}^k$ den Wert *wahr* hat, wenn auf dem Feld (i, j) die Zahl k steht.

Wir benutzen kartesische Koordinaten zur Notation von Positionen.

So ist z.B. $D_{9,1}^9$ wahr, wenn in der rechten unteren Ecke die Zahl 9 steht.

$$D_{1,9}^1 \vee D_{2,9}^1 \vee D_{3,9}^1 \vee D_{4,9}^1 \vee D_{5,9}^1 \vee D_{6,9}^1 \vee D_{7,9}^1 \vee D_{8,9}^1 \vee D_{9,9}^1$$

sagt, dass die Ziffer 1 mindestens einmal in der ersten Zeile vorkommen muß.

$$D_{1,1}^1 \vee D_{1,2}^1 \vee D_{1,3}^1 \vee D_{1,4}^1 \vee D_{1,5}^1 \vee D_{1,6}^1 \vee D_{1,7}^1 \vee D_{1,8}^1 \vee D_{1,9}^1$$

sagt, dass die Ziffer 1 mindestens einmal in der ersten Spalte vorkommen muß.

$$D_{1,1}^1 \vee D_{1,2}^1 \vee D_{1,3}^1 \vee D_{2,1}^1 \vee D_{2,2}^1 \vee D_{2,3}^1 \vee D_{3,1}^1 \vee D_{3,2}^1 \vee D_{3,3}^1$$

sagt, dass die Ziffer 1 mindestens einmal in der Region links unten vorkommen muss.

Zusätzliche AL-Formeln

Ergibt soweit: $(9 + 9 + 9) * 9 = 243$ Formeln.

Diese Formeln beschreiben Sudoku noch nicht genau.

Man muss noch sagen, dass auf jeder Zelle höchstens **eine** Zahl stehen kann.

$$\begin{aligned}
 &\neg(D_{1,1}^1 \wedge D_{1,1}^2), \neg(D_{1,1}^1 \wedge D_{1,1}^3), \neg(D_{1,1}^1 \wedge D_{1,1}^4), \neg(D_{1,1}^1 \wedge D_{1,1}^5), \\
 &\neg(D_{1,1}^1 \wedge D_{1,1}^6), \neg(D_{1,1}^1 \wedge D_{1,1}^7), \neg(D_{1,1}^1 \wedge D_{1,1}^8), \neg(D_{1,1}^1 \wedge D_{1,1}^9), \\
 &\neg(D_{1,1}^2 \wedge D_{1,1}^3), \neg(D_{1,1}^2 \wedge D_{1,1}^4), \neg(D_{1,1}^2 \wedge D_{1,1}^5), \neg(D_{1,1}^2 \wedge D_{1,1}^6), \\
 &\neg(D_{1,1}^2 \wedge D_{1,1}^7), \neg(D_{1,1}^2 \wedge D_{1,1}^8), \neg(D_{1,1}^2 \wedge D_{1,1}^9), \neg(D_{1,1}^3 \wedge D_{1,1}^4),
 \end{aligned}$$

usw.

Allgemein:

$$\neg(D_{i,j}^s \wedge D_{i,j}^t)$$

für alle $1 \leq i, j, s, t \leq 9$ mit $s < t$.

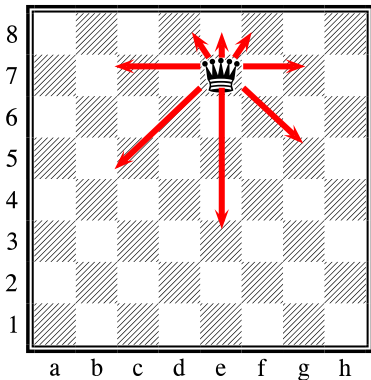
Ergibt insgesamt: $243 + 81 * 36 = 3159$ Formeln.

Hinzu kommen atomare Formeln, die das konkrete Rätsel beschreiben:

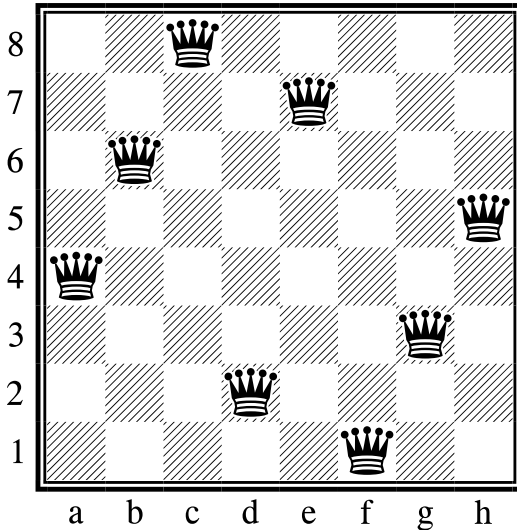
$$D_{1,4}^7, \dots, D_{9,6}^3$$

Das 8-Damen-Problem

Man platziere acht Damen so auf einem Schachbrett, dass sie sich gegenseitig nicht bedrohen.



Eine Lösung des 8-Damen-Problems



Wiederholung

Syntax und Semantik der Aussagenlogik

Logische Zeichen

- 1** Symbol für den Wahrheitswert „wahr“
- 0** Symbol für den Wahrheitswert „falsch“
- $\neg$ Negationssymbol („nicht“)
- $\wedge$ Konjunktionssymbol („und“)
- $\vee$ Disjunktionssymbol („oder“)
- $\rightarrow$ Implikationssymbol („wenn . . . dann“)
- $\leftrightarrow$ Symbol für beiderseitige Implikation („genau dann, wenn“)
- (,) die beiden Klammern

Signatur

Eine (aussagenlogische) *Signatur* ist eine abzählbare Menge Σ von Symbolen, etwa

$$\Sigma = \{P_0, \dots, P_n\}$$

oder

$$\Sigma = \{P_0, P_1, \dots\}.$$

Die Elemente von Σ heißen auch *atomare Aussagen*, *Atome* oder *Aussagevariablen*.

Formeln der Aussagenlogik

Zur Signatur Σ ist $For0_\Sigma$, die Menge der
Formeln über Σ

induktiv definiert durch

- ▶ $1 \in For0_\Sigma$
 $0 \in For0_\Sigma$
 $\Sigma \subseteq For0_\Sigma$
- ▶ wenn $A, B \in For0_\Sigma$ dann sind auch
 $\neg A$
 $(A \wedge B)$
 $(A \vee B)$
 $(A \rightarrow B)$
 $(A \leftrightarrow B)$

Elemente von $For0_\Sigma$

Interpretation

Es sei Σ eine aussagenlogische Signatur. Eine **Interpretation** über Σ ist eine beliebige Abbildung

$$I : \Sigma \rightarrow \{W, F\}.$$

Auswertung

Zu jedem I über Σ wird eine zugehörige **Auswertung** der Formeln über Σ definiert

$$val_I : For_0 \Sigma \rightarrow \{W, F\}$$

mit:

$$val_I(1) = W$$

$$val_I(0) = F$$

$$val_I(P) = I(P) \quad \text{für jedes } P \in \Sigma$$

$$val_I(\neg A) = \begin{cases} F & \text{falls } val_I(A) = W \\ W & \text{falls } val_I(A) = F \end{cases}$$

Auswertung (Forts.)

val_I auf $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$, $(A \rightarrow B)$, $(A \leftrightarrow B)$ wird gemäß der folgenden Tabelle berechnet

$val_I(A)$	$val_I(B)$	$val_I(A \wedge B)$	$val_I(A \vee B)$	$val_I(A \rightarrow B)$	$val_I(A \leftrightarrow B)$
W	W	W	W	W	W
W	F	F	W	F	F
F	W	F	W	W	F
F	F	F	F	W	W

Definition

- ▶ Ein **Modell** einer Formel $A \in For0_\Sigma$ ist eine Interpretation I über Σ mit $val_I(A) = W$.
- ▶ Zu einer Formelm**enge** $M \subseteq For0_\Sigma$ ist ein Modell von M eine Interpretation I , welche Modell von jedem $A \in M$ ist.
- ▶ $A \in For0_\Sigma$ heißt **allgemeingültig**
gdw
 $val_I(A) = W$ für jede Interpretation I über Σ .
- ▶ $A \in For0_\Sigma$ heißt **erfüllbar**
gdw
es gibt eine Interpretation I über Σ mit $val_I(A) = W$.

Definition

Σ sei eine Signatur, $M \subseteq For0_{\Sigma}$, $A, B \in For0_{\Sigma}$.

- ▶ $M \models A$ lies: **aus M folgt A**
gdw
Jedes Modell von M ist auch Modell von A .
- ▶ $A, B \in For0_{\Sigma}$ heißen **logisch äquivalent**
gdw
 $\{A\} \models_{\Sigma} B$ und $\{B\} \models_{\Sigma} A$

$$A \rightarrow A$$

Selbstimplikation

$$\neg A \vee A$$

Tertium non datur

$$A \rightarrow (B \rightarrow A)$$

Abschwächung

$$0 \rightarrow A$$

Ex falso quodlibet

$$(A \wedge (A \rightarrow B)) \rightarrow B$$

Modus Ponens

$$A \wedge A \leftrightarrow A$$

Idempotenz

$$(\neg\neg A) \leftrightarrow A$$

Doppelnegation

$$A \wedge (A \vee B) \leftrightarrow A$$

Absorption

$$(A \leftrightarrow B) \leftrightarrow ((A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A))$$

Äquivalenz/Implikation

$$A \wedge (B \vee C) \leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$$

Distributivität

$$A \vee (B \wedge C) \leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$$

Distributivität

Beispiele allgemeingültiger Formeln (Forts.)

$$(A \rightarrow B) \leftrightarrow (\neg B \rightarrow \neg A) \quad \text{Kontraposition}$$

$$(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \leftrightarrow$$

$$((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C)) \quad \text{Verteilen}$$

$$\neg(A \vee B) \leftrightarrow \neg A \wedge \neg B \quad \text{De Morgan}$$

$$\neg(A \wedge B) \leftrightarrow \neg A \vee \neg B \quad \text{De Morgan}$$

Theorem

- ▶ A erfüllbar gdw $\neg A$ nicht allgemeingültig
- ▶ $\models A$ gdw A ist allgemeingültig
- ▶ $\models \neg A$ gdw A ist unerfüllbar
- ▶ $A \models B$ gdw $\models A \rightarrow B$
- ▶ $M \cup \{A\} \models B$ gdw $M \models A \rightarrow B$
- ▶ A, B sind logisch äquivalent gdw $A \leftrightarrow B$ ist allgemeingültig

Theorem

Wenn

- ▶ *A und B logisch äquivalent*
- ▶ *A Unterformel von C*
- ▶ *C' entsteht aus C dadurch, dass A durch B ersetzt wird*

dann

- ▶ *C und C' logisch äquivalent*

Quiz

Welche der folgenden Formeln sind Tautologien?

- 1 $(A \rightarrow B) \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)$ *ja*
- 2 $\neg(A \rightarrow B) \leftrightarrow (A \wedge \neg B)$ *ja*
- 3 $\neg(A \vee B) \rightarrow (A \vee B)$ *nein*
- 4 $(A \rightarrow B) \rightarrow (\neg A \rightarrow \neg B)$ *nein*
- 5 $(\neg A \vee B) \vee (A \wedge \neg B)$ *ja*

Definition

1. Eine Funktion f von $\{\mathbf{W}, \mathbf{F}\}^n$ nach $\{\mathbf{W}, \mathbf{F}\}$ für $n \in \mathbb{N}$ heißt eine n -stellige *Boolesche Funktion*.
2. Sei $A \in \text{For}_0\Sigma$, $\Sigma = \{P_1, \dots, P_n\}$ dann wird die *Boolesche Funktion* f_A von A definiert durch:

$$f_A(\bar{b}) = \text{val}_I(A)$$

wobei $\bar{b} \in \{\mathbf{W}, \mathbf{F}\}^n$ und $I(P_i) = b_i$.

Die Boolesche Funktion f_A hängt ab von der Anordnung der in ihr vorkommenden aussagenlogischen Atome!

Für $A = P_1 \wedge P_3$ in der Signatur $\Sigma = \{P_1, P_2, P_3\}$ ergibt sich f_A aus der folgenden Tabelle:

P_1	P_2	P_3	$f_A(P_1, P_2, P_3)$
W	W	W	W
W	W	F	F
W	F	W	W
W	F	F	F
F	W	W	F
F	W	F	F
F	F	W	F
F	F	F	F

Funktionale Vollständigkeit

Wiederholung

Satz

Zu jeder Booleschen Funktion $f : \{\mathbf{W}, \mathbf{F}\}^n \rightarrow \{\mathbf{W}, \mathbf{F}\}$ gibt es eine Formel $A \in \text{For}_{0\Sigma}$ mit

$$f = f_A$$

Beweis: Seien $\bar{b}_1, \dots, \bar{b}_k$ genau die n -Tupel aus $\{\mathbf{W}, \mathbf{F}\}^n$ mit $f(\bar{b}_i) = \mathbf{W}$.

$A = A_1 \vee \dots \vee A_k$, $A_i = A_{i,1} \wedge \dots \wedge A_{i,n}$ mit

$$A_{i,j} = \begin{cases} P_j & \text{falls } b_{i,j} = \mathbf{W} \\ \neg P_j & \text{falls } b_{i,j} = \mathbf{F} \end{cases}$$

Definition

Eine Menge KOp von aussagenlogischen Konstanten und Operatoren heißt eine

Basis,

wenn für jede Boolesche Funktion $f : \{\mathbf{W}, \mathbf{F}\}^n \rightarrow \{\mathbf{W}, \mathbf{F}\}$ eine Formel A existiert, die nur mit Konstanten und Operatoren aus KOp aufgebaut ist, mit

$$f_A = f.$$

Keine Minimalität für KOp gefordert.

Beispiele

- ▶ $\{1, 0, \neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$
- ▶ $\{\neg, \wedge\}$
- ▶ $\{0, \rightarrow\}$
- ▶ $\{\downarrow\}$
- ▶ $\{1, 0, sh\}$

wobei $A \downarrow B = \neg(A \vee B)$:

$val_I(A)$	$val_I(B)$	$val_I(A \downarrow B)$
W	W	F
W	F	F
F	W	F
F	F	W