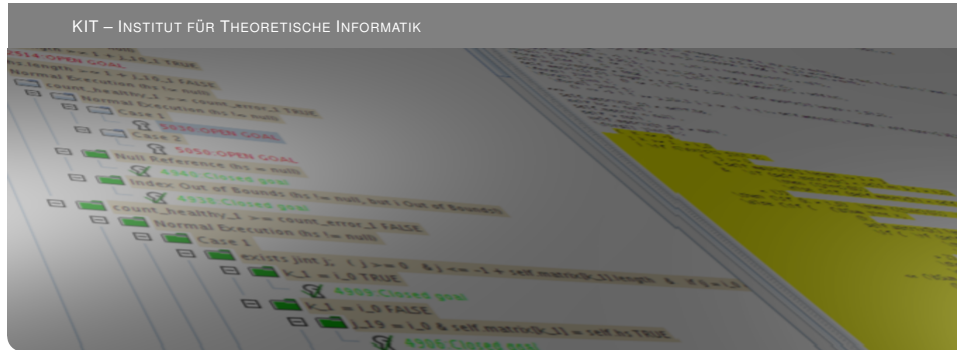


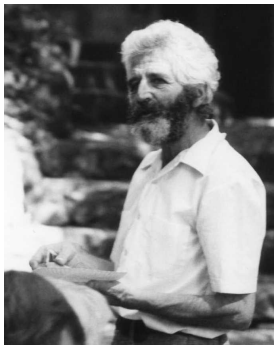
# Formale Systeme

Prof. Dr. Bernhard Beckert, WS 2016/2017

Aussagenlogik: Syntax und Semantik

KIT – INSTITUT FÜR THEORETISCHE INFORMATIK





1918 – 2016, Berkley University

**Craig's Lemma:** 1950er Jahre, für Prädikatenlogik formuliert  
Praktische Relevanz um Jahrtausendwende

Seien  $A, B$  aussagenlogische Formeln mit

$$\models A \rightarrow B$$

dann (und genau dann) gibt es eine Formel  $C$  mit

$$\models A \rightarrow C \quad \text{und} \quad \models C \rightarrow B,$$

so dass in  $C$  nur solche aussagenlogischen Atome  $P \in \Sigma$  vorkommen, die sowohl in  $A$  als auch in  $B$  vorkommen.

## Einfaches Beispiel

- ▶  $P_1 \wedge P_2 \rightarrow P_1 \vee P_3$  ist eine Tautologie.
- ▶ Ebenso  $P_1 \wedge P_2 \rightarrow P_1$ .
- ▶ Ebenso  $P_1 \rightarrow P_1 \vee P_3$ .
- ▶ Also:  $P_1$  ist eine Interpolante für  $P_1 \wedge P_2 \rightarrow P_1 \vee P_3$ .

Seien  $P_1, \dots, P_n$  alle in  $A$  vorkommenden aussagenlogischen Atome, die nicht in  $B$  vorkommen.

Für Konstanten  $c_i \in \{1, 0\}$  bezeichnen wir mit  $A[c_1, \dots, c_n]$  die Formeln, die aus  $A$  hervorgeht, indem  $P_i$  durch  $c_i$  ersetzt wird für alle  $1 \leq i \leq n$ .

Wir setzen

$$C \equiv \bigvee_{(c_1, \dots, c_n) \in \{1, 0\}^n} A[c_1, \dots, c_n]$$

Beweis der Korrektheit der Konstruktion: Siehe Skriptum

# Einfaches Beispiel zur Konstruktion von $C$

- ▶ Betrachte die Tautologie  $A \rightarrow B$   
mit  $A = P_1 \wedge P_2$ ,  $B = P_1 \vee P_3$ .
- ▶  $P_2$  ist das einzige Atom, das in  $A$ , aber nicht in  $B$   
vorkommt.
- ▶  $A[1] = P_1 \wedge \mathbf{1} \equiv P_1$
- ▶  $A[0] = P_1 \wedge \mathbf{0} \equiv \mathbf{0}$
- ▶  $C = A[1] \vee A[0]$   
 $\equiv P_1 \vee \mathbf{0}$   
 $\equiv P_1$

# Weiteres Beispiel zur Konstruktion von $C$

- ▶  $A \rightarrow B$  mit
 
$$A = (P_1 \vee \neg P_2) \wedge (\neg P_1 \vee \neg P_3) \wedge P_2$$

$$B = \neg((\neg P_2 \vee P_3) \wedge (P_2 \vee P_4) \wedge \neg P_4)$$
- ▶  $A \equiv P_1 \wedge P_2 \wedge \neg P_3$     und     $B \equiv \neg P_2 \vee \neg P_3 \vee P_4$
- ▶  $A \rightarrow B$  ist eine Tautologie.
- ▶  $P_1$  ist einziges Atom in  $A$  und nicht in  $B$ .
- ▶  $A[1] = (\mathbf{1} \vee \neg P_2) \wedge (\neg \mathbf{1} \vee \neg P_3) \wedge P_2$ 

$$\equiv \mathbf{1} \wedge \neg P_3 \wedge P_2$$

$$\equiv \neg P_3 \wedge P_2$$
- ▶  $A[0] = (\mathbf{0} \vee \neg P_2) \wedge (\neg \mathbf{0} \vee \neg P_3) \wedge P_2$ 

$$\equiv \neg P_2 \wedge \mathbf{1} \wedge P_2$$

$$\equiv \mathbf{0}$$
- ▶ Also  $C = (\neg P_3 \wedge P_2) \vee \mathbf{0} \equiv \neg P_3 \wedge P_2$   
ist eine Interpolante für  $A \rightarrow B$ .