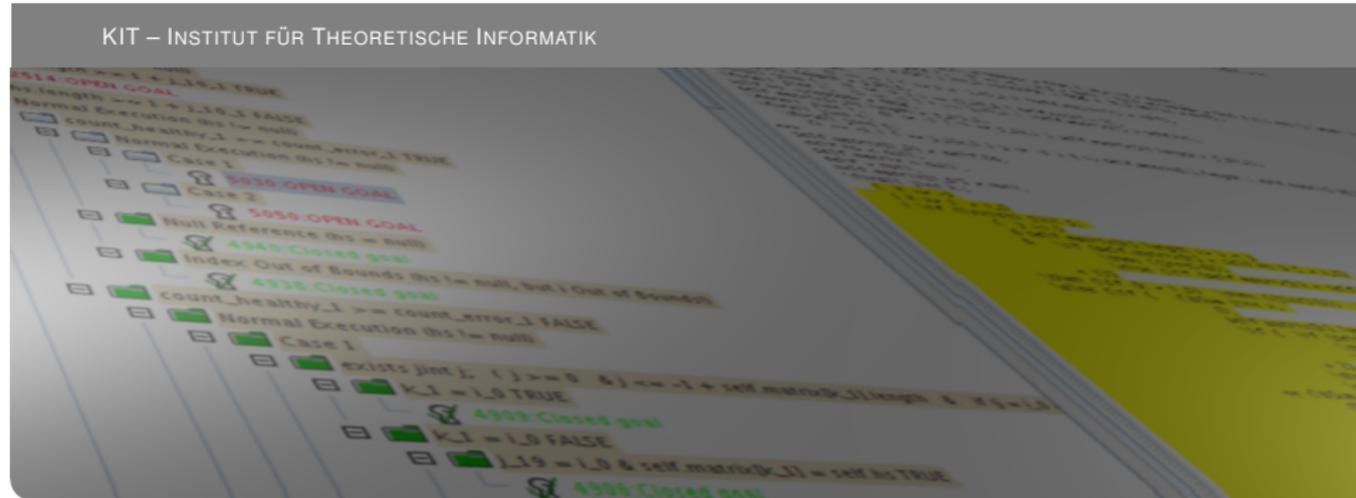


Formale Systeme

Prof. Dr. Bernhard Beckert, WS 2016/2017

Prädikatenlogik: Semantik

KIT – INSTITUT FÜR THEORETISCHE INFORMATIK



Bedeutung von Formeln

Ist die Formel

$$q(x) \rightarrow \exists y(in(y, x) \wedge kl(y))$$

wahr?

Ist die Formel

$$q(x) \rightarrow \exists y(in(y, x) \wedge kl(y))$$

wahr?

Die Signatur $\Sigma = \{k(), q(), d(), kl(), gr(), in(,)\}$ liegt fest.

Ist die Formel

$$q(x) \rightarrow \exists y(in(y, x) \wedge kl(y))$$

wahr?

Die Signatur $\Sigma = \{k(), q(), d(), kl(), gr(), in(,)\}$ liegt fest.

Die Wahrheit ist abhängig von

Bedeutung von Formeln

Ist die Formel

$$q(x) \rightarrow \exists y(in(y, x) \wedge kl(y))$$

wahr?

Die Signatur $\Sigma = \{k(), q(), d(), kl(), gr(), in(,)\}$ liegt fest.

Die Wahrheit ist abhängig von

- ▶ einer Interpretation $\mathcal{D} = (D, I)$

Ist die Formel

$$q(x) \rightarrow \exists y(in(y, x) \wedge kl(y))$$

wahr?

Die Signatur $\Sigma = \{k(), q(), d(), kl(), gr(), in(,)\}$ liegt fest.

Die Wahrheit ist abhängig von

- ▶ einer Interpretation $\mathcal{D} = (D, I)$
- ▶ einer Variablenbelegung β

Einführendes Beispiel 2

```
1   int max = 0;
2   if ( a.length > 0 ) max = a[0];
3   int i = 1;
4   while ( i < a.length ) {
5       if ( a[i] > max ) max = a[i];
6       ++i;
7   }
```

Einführendes Beispiel 2

```
1   int max = 0;
2   if ( a.length > 0 ) max = a[0];
3   int i = 1;
4   while ( i < a.length ) {
5       if ( a[i] > max ) max = a[i];
6       ++i;
7   }
```

Nachbedingung:

$$(\forall \text{ forall int } j; (j \geq 0 \ \& \ j < a.length \rightarrow \text{max} \geq a[j]))$$

Definition

Es sei Σ eine Signatur der PL1.

Eine *Interpretation* \mathcal{D} von Σ ist ein Paar (D, I) mit

Definition

Es sei Σ eine Signatur der PL1.

Eine *Interpretation* \mathcal{D} von Σ ist ein Paar (D, I) mit

1. D ist eine beliebige, nichtleere Menge

Definition

Es sei Σ eine Signatur der PL1.

Eine *Interpretation* \mathcal{D} von Σ ist ein Paar (D, I) mit

1. D ist eine beliebige, nichtleere Menge
2. I ist eine Abbildung der Signatursymbole, die

Definition

Es sei Σ eine Signatur der PL1.

Eine *Interpretation* \mathcal{D} von Σ ist ein Paar (D, I) mit

1. D ist eine beliebige, nichtleere Menge
2. I ist eine Abbildung der Signatursymbole, die
 - ▶ jeder Konstanten c ein Element $I(c) \in D$

Definition

Es sei Σ eine Signatur der PL1.

Eine *Interpretation* \mathcal{D} von Σ ist ein Paar (D, I) mit

1. D ist eine beliebige, nichtleere Menge
2. I ist eine Abbildung der Signatursymbole, die
 - ▶ jeder Konstanten c ein Element $I(c) \in D$
 - ▶ für $n \geq 1$: jedem n -stelligen Funktionssymbol f eine Funktion $I(f) : D^n \rightarrow D$

Definition

Es sei Σ eine Signatur der PL1.

Eine *Interpretation* \mathcal{D} von Σ ist ein Paar (D, I) mit

1. D ist eine beliebige, nichtleere Menge
2. I ist eine Abbildung der Signatursymbole, die
 - ▶ jeder Konstanten c ein Element $I(c) \in D$
 - ▶ für $n \geq 1$: jedem n -stelligen Funktionssymbol f eine Funktion $I(f) : D^n \rightarrow D$
 - ▶ jedem 0-stelligen Prädikatsymbol P einen Wahrheitswert $I(P) \in \{\mathbf{W}, \mathbf{F}\}$

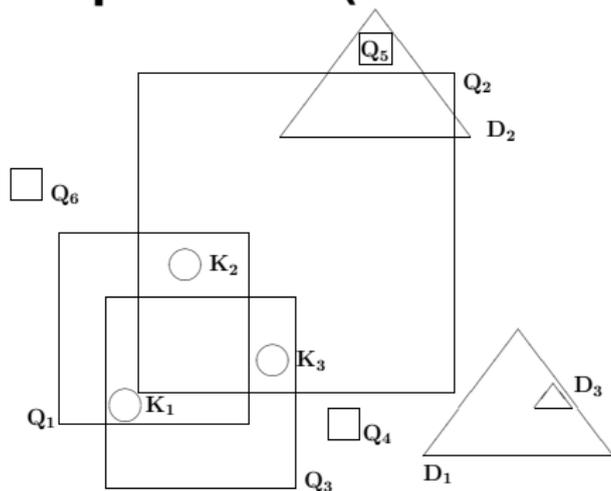
Definition

Es sei Σ eine Signatur der PL1.

Eine *Interpretation* \mathcal{D} von Σ ist ein Paar (D, I) mit

1. D ist eine beliebige, nichtleere Menge
2. I ist eine Abbildung der Signatursymbole, die
 - ▶ jeder Konstanten c ein Element $I(c) \in D$
 - ▶ für $n \geq 1$: jedem n -stelligen Funktionssymbol f eine Funktion $I(f) : D^n \rightarrow D$
 - ▶ jedem 0-stelligen Prädikatsymbol P einen Wahrheitswert $I(P) \in \{\mathbf{W}, \mathbf{F}\}$
 - ▶ für $n \geq 1$: jedem n -stelligen Prädikatsymbol p eine n -stellige Relation $I(p) \subseteq D^n$ zuordnet.

Beispiel-Interpretation (Tarski's World)



$$P_{\Sigma} = \{k(), q(), d(), kl(), gr(), in(,)\}$$

$$D_{Bsp} = \{Q_1, \dots, Q_6\} \cup \{K_1, K_2, K_3, D_1, D_2, D_3\}$$

$$I_{Bsp}(q) = \{Q_1, \dots, Q_6\}, \quad I_{Bsp}(k) = \{K_1, K_2, K_3\}, \quad I_{Bsp}(d) = \{D_1, D_2, D_3\}$$

$$I_{Bsp}(in) = \{(K_1, Q_1), (K_1, Q_3), (K_2, Q_1), (K_2, Q_2), (K_3, Q_2), (K_3, Q_3), (D_3, D_1), (Q_5, D_2)\}$$

Definition

Es sei (D, I) eine Interpretation von Σ .

Eine *Variablenbelegung* (oder kurz *Belegung* über D) ist eine Funktion

$$\beta : \text{Var} \rightarrow D.$$

Definition

Es sei (D, I) eine Interpretation von Σ .

Eine *Variablenbelegung* (oder kurz *Belegung* über D) ist eine Funktion

$$\beta : \text{Var} \rightarrow D.$$

Zu β , $x \in \text{Var}$ und $d \in D$ definieren wir die *Modifikation* von β an der Stelle x zu d :

$$\beta_x^d(y) = \begin{cases} d & \text{falls } y = x \\ \beta(y) & \text{falls } y \neq x \end{cases}$$

Definition Auswertungsfunktion

Sei (D, I) Interpretation von Σ , β Variablenbelegung über D .
Wir definieren eine Funktion $val_{D,I,\beta}$, mit

$$\begin{aligned} val_{D,I,\beta}(t) &\in D && \text{für } t \in Term_{\Sigma} \\ val_{D,I,\beta}(A) &\in \{\mathbf{W}, \mathbf{F}\} && \text{für } A \in For_{\Sigma} \end{aligned}$$

Definition Auswertungsfunktion

Sei (D, I) Interpretation von Σ , β Variablenbelegung über D .
Wir definieren eine Funktion $val_{D,I,\beta}$, mit

$$\begin{aligned} val_{D,I,\beta}(t) &\in D && \text{für } t \in Term_{\Sigma} \\ val_{D,I,\beta}(A) &\in \{\mathbf{W}, \mathbf{F}\} && \text{für } A \in For_{\Sigma} \end{aligned}$$

Definition Auswertung von Termen

$$\begin{aligned} val_{D,I,\beta}(x) &= \beta(x) \text{ für } x \in Var \\ val_{D,I,\beta}(f(t_1, \dots, t_n)) &= (I(f))(val_{D,I,\beta}(t_1), \dots, val_{D,I,\beta}(t_n)) \end{aligned}$$

Definition

1. $val_{D,I,\beta}(\mathbf{1}) = \mathbf{W}$
 $val_{D,I,\beta}(\mathbf{0}) = \mathbf{F}$
 $val_{D,I,\beta}(s \doteq t) :=$

Definition

- $val_{D,I,\beta}(\mathbf{1}) = \mathbf{W}$
 $val_{D,I,\beta}(\mathbf{0}) = \mathbf{F}$
 $val_{D,I,\beta}(s \doteq t) := \begin{cases} \mathbf{W} & \text{falls } val_{D,I,\beta}(s) = val_{D,I,\beta}(t) \\ \mathbf{F} & \text{sonst} \end{cases}$

Definition

- $val_{D,I,\beta}(\mathbf{1}) = \mathbf{W}$
 $val_{D,I,\beta}(\mathbf{0}) = \mathbf{F}$
 $val_{D,I,\beta}(s \doteq t) := \begin{cases} \mathbf{W} & \text{falls } val_{D,I,\beta}(s) = val_{D,I,\beta}(t) \\ \mathbf{F} & \text{sonst} \end{cases}$
 $val_{D,I,\beta}(P) \quad \quad \quad := I(P)$ für 0-stellige Prädikate P
 $val_{D,I,\beta}(p(t_1, \dots, t_n)) :=$

Definition

- $val_{D,I,\beta}(\mathbf{1}) = \mathbf{W}$
 $val_{D,I,\beta}(\mathbf{0}) = \mathbf{F}$
 $val_{D,I,\beta}(s \doteq t) := \begin{cases} \mathbf{W} & \text{falls } val_{D,I,\beta}(s) = val_{D,I,\beta}(t) \\ \mathbf{F} & \text{sonst} \end{cases}$
 $val_{D,I,\beta}(P) \quad := I(P)$ für 0-stellige Prädikate P
 $val_{D,I,\beta}(p(t_1, \dots, t_n)) := \begin{cases} \mathbf{W} & \text{falls } (val_{D,I,\beta}(t_1), \dots, val_{D,I,\beta}(t_n)) \in I(p) \\ \mathbf{F} & \text{sonst} \end{cases}$

Definition

Definition

2. $val_{D,I,\beta}(X)$ für $X \in \{\neg A, A \wedge B, A \vee B, A \rightarrow B, A \leftrightarrow B\}$ wie in der Aussagenlogik.

Definition

2. $val_{D,I,\beta}(X)$ für $X \in \{\neg A, A \wedge B, A \vee B, A \rightarrow B, A \leftrightarrow B\}$ wie in der Aussagenlogik.

3. $val_{D,I,\beta}(\forall xA) :=$

$$\begin{cases} \mathbf{W} & \text{falls für alle } d \in D : val_{D,I,\beta_x^d}(A) = \mathbf{W} \\ \mathbf{F} & \text{sonst} \end{cases}$$

Definition

2. $val_{D,I,\beta}(X)$ für $X \in \{\neg A, A \wedge B, A \vee B, A \rightarrow B, A \leftrightarrow B\}$ wie in der Aussagenlogik.

3. $val_{D,I,\beta}(\forall xA) :=$

$$\begin{cases} \mathbf{W} & \text{falls für alle } d \in D : val_{D,I,\beta_x^d}(A) = \mathbf{W} \\ \mathbf{F} & \text{sonst} \end{cases}$$

4. $val_{D,I,\beta}(\exists xA) :=$

$$\begin{cases} \mathbf{W} & \text{falls ein } d \in D \text{ existiert mit } val_{D,I,\beta_x^d}(A) = \mathbf{W} \\ \mathbf{F} & \text{sonst} \end{cases}$$

Beispiel für Auswertung

Sei die Interpretation $\mathcal{D}_{Bsp} = (D_{Bsp}, I_{Bsp})$ und die Variablenbelegung $\beta(x) = Q_1$. Werte darin die Formel aus:

$$q(x) \rightarrow \exists y(in(y, x) \wedge kl(y))$$

Beispiel für Auswertung

Sei die Interpretation $\mathcal{D}_{Bsp} = (D_{Bsp}, I_{Bsp})$ und die Variablenbelegung $\beta(x) = Q_1$. Werte darin die Formel aus:

$$q(x) \rightarrow \exists y(in(y, x) \wedge kl(y))$$

$$val_{\mathcal{D}_{Bsp}, \beta}(x) = Q_1 \in I(q),$$

also

$$val_{\mathcal{D}_{Bsp}, \beta}(q(x)) = \mathbf{W}.$$

Beispiel für Auswertung

Sei die Interpretation $\mathcal{D}_{Bsp} = (D_{Bsp}, I_{Bsp})$ und die Variablenbelegung $\beta(x) = Q_1$. Werte darin die Formel aus:

$$q(x) \rightarrow \exists y(in(y, x) \wedge kl(y))$$

$$val_{\mathcal{D}_{Bsp}, \beta}(x) = Q_1 \in I(q),$$

also

$$val_{\mathcal{D}_{Bsp}, \beta}(q(x)) = \mathbf{W}.$$

Beispiel für Auswertung

Sei die Interpretation $\mathcal{D}_{Bsp} = (D_{Bsp}, I_{Bsp})$ und die Variablenbelegung $\beta(x) = Q_1$. Werte darin die Formel aus:

$$q(x) \rightarrow \exists y(in(y, x) \wedge kl(y))$$

$$val_{\mathcal{D}_{Bsp}, \beta}(x) = Q_1 \in I(q),$$

also

$$val_{\mathcal{D}_{Bsp}, \beta}(q(x)) = \mathbf{W}.$$

Wähle K_1 als Belegung für y .

$$(K_1, Q_1) \in I_{Bsp}(in) \text{ und}$$

$$K_1 \in I_{Bsp}(kl),$$

Beispiel für Auswertung

Sei die Interpretation $\mathcal{D}_{Bsp} = (D_{Bsp}, I_{Bsp})$ und die Variablenbelegung $\beta(x) = Q_1$. Werte darin die Formel aus:

$$q(x) \rightarrow \exists y(in(y, x) \wedge kl(y))$$

$$val_{\mathcal{D}_{Bsp}, \beta}(x) = Q_1 \in I(q),$$

also

$$val_{\mathcal{D}_{Bsp}, \beta}(q(x)) = \mathbf{W}.$$

Wähle K_1 als Belegung für y .

$$(K_1, Q_1) \in I_{Bsp}(in) \text{ und}$$

$$K_1 \in I_{Bsp}(kl),$$

also

$$val_{\mathcal{D}_{Bsp}, \beta_y^{K_1}}(in(y, x) \wedge kl(y)) = \mathbf{W},$$

Beispiel für Auswertung

Sei die Interpretation $\mathcal{D}_{Bsp} = (D_{Bsp}, I_{Bsp})$ und die Variablenbelegung $\beta(x) = Q_1$. Werte darin die Formel aus:

$$q(x) \rightarrow \exists y(in(y, x) \wedge kl(y))$$

$$val_{\mathcal{D}_{Bsp}, \beta}(x) = Q_1 \in I(q),$$

also

$$val_{\mathcal{D}_{Bsp}, \beta}(q(x)) = \mathbf{W}.$$

Wähle K_1 als Belegung für y .

$$(K_1, Q_1) \in I_{Bsp}(in) \text{ und}$$

$$K_1 \in I_{Bsp}(kl),$$

also

$$val_{\mathcal{D}_{Bsp}, \beta_y^{K_1}}((in(y, x) \wedge kl(y))) = \mathbf{W},$$

also

$$val_{\mathcal{D}_{Bsp}, \beta}(\exists y(in(y, x) \wedge kl(y))) = \mathbf{W}$$

Beispiel für Auswertung

Sei die Interpretation $\mathcal{D}_{Bsp} = (D_{Bsp}, I_{Bsp})$ und die Variablenbelegung $\beta(x) = Q_1$. Werte darin die Formel aus:

$$q(x) \rightarrow \exists y(in(y, x) \wedge kl(y))$$

$$val_{\mathcal{D}_{Bsp}, \beta}(x) = Q_1 \in I(q),$$

also

$$val_{\mathcal{D}_{Bsp}, \beta}(q(x)) = \mathbf{W}.$$

Wähle K_1 als Belegung für y .

$$(K_1, Q_1) \in I_{Bsp}(in) \text{ und}$$

$$K_1 \in I_{Bsp}(kl),$$

also

$$val_{\mathcal{D}_{Bsp}, \beta_y^{K_1}}((in(y, x) \wedge kl(y))) = \mathbf{W},$$

also

$$val_{\mathcal{D}_{Bsp}, \beta}(\exists y(in(y, x) \wedge kl(y))) = \mathbf{W}$$

Insgesamt

$$val_{\mathcal{D}_{Bsp}, \beta}(q(x) \rightarrow \exists y(in(y, x) \wedge kl(y))) = \mathbf{W}$$

Theorem

\mathcal{D} sei Interpretation, β, γ Variablenbelegungen

1. Gilt für den Term t $\beta(x) = \gamma(x)$ für alle $x \in \text{Var}(t)$, dann $\text{val}_{\mathcal{D},\beta}(t) = \text{val}_{\mathcal{D},\gamma}(t)$.

Theorem

\mathcal{D} sei Interpretation, β, γ Variablenbelegungen

1. Gilt für den Term t $\beta(x) = \gamma(x)$ für alle $x \in \text{Var}(t)$, dann $\text{val}_{\mathcal{D},\beta}(t) = \text{val}_{\mathcal{D},\gamma}(t)$.
2. Gilt für die Formel A $\beta(x) = \gamma(x)$ für alle $x \in \text{Frei}(A)$, dann $\text{val}_{\mathcal{D},\beta}(A) = \text{val}_{\mathcal{D},\gamma}(A)$.

Theorem

\mathcal{D} sei Interpretation, β, γ Variablenbelegungen

1. Gilt für den Term t $\beta(x) = \gamma(x)$ für alle $x \in \text{Var}(t)$, dann $\text{val}_{\mathcal{D},\beta}(t) = \text{val}_{\mathcal{D},\gamma}(t)$.
2. Gilt für die Formel A $\beta(x) = \gamma(x)$ für alle $x \in \text{Frei}(A)$, dann $\text{val}_{\mathcal{D},\beta}(A) = \text{val}_{\mathcal{D},\gamma}(A)$.
3. Ist $A \in \text{For}_{\Sigma}$ geschlossen, dann gilt $\text{val}_{\mathcal{D},\beta}(A) = \text{val}_{\mathcal{D},\gamma}(A)$

Theorem

\mathcal{D} sei Interpretation, β, γ Variablenbelegungen

1. Gilt für den Term t $\beta(x) = \gamma(x)$ für alle $x \in \text{Var}(t)$, dann $\text{val}_{\mathcal{D},\beta}(t) = \text{val}_{\mathcal{D},\gamma}(t)$.
2. Gilt für die Formel A $\beta(x) = \gamma(x)$ für alle $x \in \text{Frei}(A)$, dann $\text{val}_{\mathcal{D},\beta}(A) = \text{val}_{\mathcal{D},\gamma}(A)$.
3. Ist $A \in \text{For}_{\Sigma}$ geschlossen, dann gilt $\text{val}_{\mathcal{D},\beta}(A) = \text{val}_{\mathcal{D},\gamma}(A)$

Beweis: Durch strukturelle Induktion unter Ausnutzung der Definition von val .

Theorem

\mathcal{D} sei Interpretation, β, γ Variablenbelegungen

1. Gilt für den Term t $\beta(x) = \gamma(x)$ für alle $x \in \text{Var}(t)$, dann $\text{val}_{\mathcal{D},\beta}(t) = \text{val}_{\mathcal{D},\gamma}(t)$.
2. Gilt für die Formel A $\beta(x) = \gamma(x)$ für alle $x \in \text{Frei}(A)$, dann $\text{val}_{\mathcal{D},\beta}(A) = \text{val}_{\mathcal{D},\gamma}(A)$.
3. Ist $A \in \text{For}_{\Sigma}$ geschlossen, dann gilt $\text{val}_{\mathcal{D},\beta}(A) = \text{val}_{\mathcal{D},\gamma}(A)$

Beweis: Durch strukturelle Induktion unter Ausnutzung der Definition von val .

Konsequenz: Ist $A \in \text{For}_{\Sigma}$ geschlossen, schreiben wir $\text{val}_{\mathcal{D}}(A)$ statt $\text{val}_{\mathcal{D},\beta}(A)$.

Theorem

\mathcal{D} sei Interpretation, β, γ Variablenbelegungen

1. Gilt für den Term t $\beta(x) = \gamma(x)$ für alle $x \in \text{Var}(t)$, dann $\text{val}_{\mathcal{D},\beta}(t) = \text{val}_{\mathcal{D},\gamma}(t)$.
2. Gilt für die Formel A $\beta(x) = \gamma(x)$ für alle $x \in \text{Frei}(A)$, dann $\text{val}_{\mathcal{D},\beta}(A) = \text{val}_{\mathcal{D},\gamma}(A)$.
3. Ist $A \in \text{For}_{\Sigma}$ geschlossen, dann gilt $\text{val}_{\mathcal{D},\beta}(A) = \text{val}_{\mathcal{D},\gamma}(A)$

Beweis: Durch strukturelle Induktion unter Ausnutzung der Definition von val .

Konsequenz: Ist $A \in \text{For}_{\Sigma}$ geschlossen, schreiben wir $\text{val}_{\mathcal{D}}(A)$ statt $\text{val}_{\mathcal{D},\beta}(A)$.

Notation: $\mathcal{D} \models A$ bedeutet $\text{val}_{\mathcal{D}}(A) = \mathbf{W}$.

Signatur $\Sigma_{arith} = \{0, 1, +, *, <\}$

Signatur $\Sigma_{arith} = \{0, 1, +, *, <\}$

Struktur 1: Die mathematischen ganzen Zahlen

$$\mathcal{Z} = (\mathbb{Z}, \overset{\mathbb{Z}}{+}, \overset{\mathbb{Z}}{*}, \overset{\mathbb{Z}}{<}).$$

Signatur $\Sigma_{arith} = \{0, 1, +, *, <\}$

Struktur 1: Die mathematischen ganzen Zahlen

$$\mathcal{Z} = (\mathbb{Z}, \overset{\mathbb{Z}}{+}, \overset{\mathbb{Z}}{*}, \overset{\mathbb{Z}}{<}).$$

Struktur 2: Die ganzen Zahlen in Java (int)

$$\mathcal{Z}_{Jint} = (\mathbb{Z}_{Jint}, \overset{J}{+}, \overset{J}{*}, \overset{J}{<}).$$

$$\mathbb{Z}_{Jint} := [int_MIN, int_MAX] = [-2^{31}, 2^{31} - 1]$$

wobei: $n \overset{J}{+} m :=$ nächste Folie

$n \overset{J}{*} m :=$ nächste Folie

$n \overset{J}{<} m :\Leftrightarrow n < m$

Für $n, m \in [int_MIN, int_MAX]$ definiere

$$n \overset{J}{+} m := int_MIN \overset{\mathbb{Z}}{+} (int_HALFRANGE \overset{\mathbb{Z}}{+} (n \overset{\mathbb{Z}}{+} m)) \overset{\mathbb{Z}}{\%} int_RANGE$$

Für $n, m \in [int_MIN, int_MAX]$ definiere

$$n \overset{J}{+} m := int_MIN \overset{\mathbb{Z}}{+} (int_HALFRANGE \overset{\mathbb{Z}}{+} (n \overset{\mathbb{Z}}{+} m)) \overset{\mathbb{Z}}{\%} int_RANGE$$

wobei $int_HALFRANGE = 2^{31}$ und $int_RANGE = 2^{32}$.

Für $n, m \in [int_MIN, int_MAX]$ definiere

$$n \overset{J}{+} m := int_MIN \overset{\mathbb{Z}}{+} (int_HALFRANGE \overset{\mathbb{Z}}{+} (n \overset{\mathbb{Z}}{+} m)) \overset{\mathbb{Z}}{\%} int_RANGE$$

$$n \overset{J}{*} m := int_MIN \overset{\mathbb{Z}}{+} (int_HALFRANGE \overset{\mathbb{Z}}{+} (n \overset{\mathbb{Z}}{*} m)) \overset{\mathbb{Z}}{\%} int_RANGE$$

wobei $int_HALFRANGE = 2^{31}$ und $int_RANGE = 2^{32}$.

Für $n, m \in [int_MIN, int_MAX]$ definiere

$$n \overset{J}{+} m := int_MIN \overset{\mathbb{Z}}{+} (int_HALFRANGE \overset{\mathbb{Z}}{+} (n \overset{\mathbb{Z}}{+} m)) \overset{\mathbb{Z}}{\%} int_RANGE$$

$$n \overset{J}{*} m := int_MIN \overset{\mathbb{Z}}{+} (int_HALFRANGE \overset{\mathbb{Z}}{+} (n \overset{\mathbb{Z}}{*} m)) \overset{\mathbb{Z}}{\%} int_RANGE$$

wobei $int_HALFRANGE = 2^{31}$ und $int_RANGE = 2^{32}$.

Dann gilt z.B.

$$int_MAX \overset{J}{+} 1 = int_MIN \quad \text{und} \quad int_MIN \overset{J}{+} (-1) = int_MAX$$

Vergleich von \mathcal{Z} und \mathcal{Z}_{Jint}

Formel ϕ	$\mathcal{Z} \models \phi$ $\mathcal{Z}_{jint} \models \phi$
---------------	--

$$\forall x \exists y (x < y)$$

$$\forall x \forall y ((x + 1) * y = x * y + y)$$

$$\exists x (0 < x \wedge x + 1 < 0)$$

Vergleich von \mathcal{Z} und \mathcal{Z}_{Jint}

Formel ϕ	$\mathcal{Z} \models \phi$ $\mathcal{Z}_{jint} \models \phi$
$\forall x \exists y (x < y)$	ja
$\forall x \forall y ((x + 1) * y = x * y + y)$	
$\exists x (0 < x \wedge x + 1 < 0)$	

Vergleich von \mathcal{Z} und \mathcal{Z}_{Jint}

Formel ϕ	$\mathcal{Z} \models \phi$	$\mathcal{Z}_{jint} \models \phi$
$\forall x \exists y (x < y)$	ja	nein
$\forall x \forall y ((x + 1) * y = x * y + y)$		
$\exists x (0 < x \wedge x + 1 < 0)$		

Vergleich von \mathcal{Z} und \mathcal{Z}_{Jint}

Formel ϕ	$\mathcal{Z} \models \phi$	$\mathcal{Z}_{jint} \models \phi$
$\forall x \exists y (x < y)$	ja	nein
$\forall x \forall y ((x + 1) * y = x * y + y)$	ja	
$\exists x (0 < x \wedge x + 1 < 0)$		

Vergleich von \mathcal{Z} und \mathcal{Z}_{Jint}

Formel ϕ	$\mathcal{Z} \models \phi$	$\mathcal{Z}_{jint} \models \phi$
$\forall x \exists y (x < y)$	ja	nein
$\forall x \forall y ((x + 1) * y = x * y + y)$	ja	ja
$\exists x (0 < x \wedge x + 1 < 0)$		

Vergleich von \mathcal{Z} und \mathcal{Z}_{Jint}

Formel ϕ	$\mathcal{Z} \models \phi$	$\mathcal{Z}_{jint} \models \phi$
$\forall x \exists y (x < y)$	ja	nein
$\forall x \forall y ((x + 1) * y = x * y + y)$	ja	ja
$\exists x (0 < x \wedge x + 1 < 0)$	nein	

Vergleich von \mathcal{Z} und \mathcal{Z}_{Jint}

Formel ϕ	$\mathcal{Z} \models \phi$	$\mathcal{Z}_{jint} \models \phi$
$\forall x \exists y (x < y)$	ja	nein
$\forall x \forall y ((x + 1) * y = x * y + y)$	ja	ja
$\exists x (0 < x \wedge x + 1 < 0)$	nein	ja

Theorem

Σ sei eine Signatur,
 \mathcal{D} eine Interpretation für Σ ,
 β, β' Belegungen,
 σ eine Substitution und $t \in \text{Term}_\Sigma$.

Theorem

Σ sei eine Signatur,
 \mathcal{D} eine Interpretation für Σ ,
 β, β' Belegungen,
 σ eine Substitution und $t \in \text{Term}_\Sigma$.

Dann gilt

$$\text{val}_{\mathcal{D},\beta}(\sigma(t)) = \text{val}_{\mathcal{D},\beta'}(t).$$

Theorem

Σ sei eine Signatur,
 \mathcal{D} eine Interpretation für Σ ,
 β, β' Belegungen,
 σ eine Substitution und $t \in \text{Term}_\Sigma$.

Dann gilt

$$\text{val}_{\mathcal{D},\beta}(\sigma(t)) = \text{val}_{\mathcal{D},\beta'}(t).$$

wobei

$$\beta'(x) = \text{val}_{\mathcal{D},\beta}(\sigma(x))$$

für alle $x \in \text{Var}$.

Strukturelle Induktion nach t .

Fall $t = x \in \text{Var}$:

$$\begin{aligned} \text{val}_{\mathcal{D},\beta}(\sigma(x)) &= \beta'(x) && \text{Def. von } \beta' \\ &= \text{val}_{\mathcal{D},\beta'}(x) && \text{Def. von } \text{val}(x) \end{aligned}$$

Fall $t = f(t_1, \dots, t_n)$:

$val_{\mathcal{D}, \beta}(\sigma(f(t_1, \dots, t_n)))$

Fall $t = f(t_1, \dots, t_n)$:

$$\begin{aligned} \text{val}_{\mathcal{D},\beta}(\sigma(f(t_1, \dots, t_n))) \\ = \text{val}_{\mathcal{D},\beta}(f(\sigma(t_1), \dots, \sigma(t_n))) \end{aligned}$$

Fall $t = f(t_1, \dots, t_n)$:

$$\text{val}_{\mathcal{D},\beta}(\sigma(f(t_1, \dots, t_n)))$$

$$= \text{val}_{\mathcal{D},\beta}(f(\sigma(t_1), \dots, \sigma(t_n)))$$

$$= I(f)(\text{val}_{\mathcal{D},\beta}(\sigma(t_1)), \dots, \text{val}_{\mathcal{D},\beta}(\sigma(t_n)))$$

Fall $t = f(t_1, \dots, t_n)$:

$$\text{val}_{\mathcal{D},\beta}(\sigma(f(t_1, \dots, t_n)))$$

$$\begin{aligned} &= \text{val}_{\mathcal{D},\beta}(f(\sigma(t_1), \dots, \sigma(t_n))) \\ &= I(f)(\text{val}_{\mathcal{D},\beta}(\sigma(t_1)), \dots, \text{val}_{\mathcal{D},\beta}(\sigma(t_n))) \\ &= I(f)(\text{val}_{\mathcal{D},\beta t}(t_1), \dots, \text{val}_{\mathcal{D},\beta t}(t_n)) \\ &\quad \text{(nach Induktionsannahme)} \end{aligned}$$

Fall $t = f(t_1, \dots, t_n)$:

$$\begin{aligned} & \text{val}_{\mathcal{D},\beta}(\sigma(f(t_1, \dots, t_n))) \\ &= \text{val}_{\mathcal{D},\beta}(f(\sigma(t_1), \dots, \sigma(t_n))) \\ &= I(f)(\text{val}_{\mathcal{D},\beta}(\sigma(t_1)), \dots, \text{val}_{\mathcal{D},\beta}(\sigma(t_n))) \\ &= I(f)(\text{val}_{\mathcal{D},\beta'}(t_1), \dots, \text{val}_{\mathcal{D},\beta'}(t_n)) \\ & \quad \text{(nach Induktionsannahme)} \\ &= \text{val}_{\mathcal{D},\beta'}(f(t_1, \dots, t_n)) \end{aligned}$$

Kollisionfreie Substitutionen

Es bezeichne F die Formel

$$p(x, z) \wedge \exists y(p(x, y) \wedge p(z, y) \rightarrow p(x, y))$$

Welche der folgenden Substitutionen ist kollisionsfrei für F ?

$$\sigma_1 \quad \{x/a, z/b\}$$

$$\sigma_2 \quad \{x/(x+z), z/(x+z)\}$$

$$\sigma_3 \quad \{x/(x+y), z/a\}$$

$$\sigma_4 \quad \{y/(x+y)\}$$

$$\sigma_5 \quad \{x/z\}$$

Es bezeichne F die Formel

$$p(x, z) \wedge \exists y(p(x, y) \wedge p(z, y) \rightarrow p(x, y))$$

Welche der folgenden Substitutionen ist kollisionsfrei für F ?

- σ_1 $\{x/a, z/b\}$ *kollisionsfrei*
- σ_2 $\{x/(x+z), z/(x+z)\}$
- σ_3 $\{x/(x+y), z/a\}$
- σ_4 $\{y/(x+y)\}$
- σ_5 $\{x/z\}$

Kollisionssfreie Substitutionen

Es bezeichne F die Formel

$$p(x, z) \wedge \exists y(p(x, y) \wedge p(z, y) \rightarrow p(x, y))$$

Welche der folgenden Substitutionen ist kollisionsfrei für F ?

- σ_1 $\{x/a, z/b\}$ *kollisionsfrei*
- σ_2 $\{x/(x+z), z/(x+z)\}$ *kollisionsfrei*
- σ_3 $\{x/(x+y), z/a\}$
- σ_4 $\{y/(x+y)\}$
- σ_5 $\{x/z\}$

Kollisionsfreie Substitutionen

Es bezeichne F die Formel

$$p(x, z) \wedge \exists y(p(x, y) \wedge p(z, y) \rightarrow p(x, y))$$

Welche der folgenden Substitutionen ist kollisionsfrei für F ?

- σ_1 $\{x/a, z/b\}$ *kollisionsfrei*
- σ_2 $\{x/(x+z), z/(x+z)\}$ *kollisionsfrei*
- σ_3 $\{x/(x+y), z/a\}$ *Kollision*
- σ_4 $\{y/(x+y)\}$
- σ_5 $\{x/z\}$

Es bezeichne F die Formel

$$p(x, z) \wedge \exists y(p(x, y) \wedge p(z, y) \rightarrow p(x, y))$$

Welche der folgenden Substitutionen ist kollisionsfrei für F ?

- | | | |
|------------|------------------------|-----------------------|
| σ_1 | $\{x/a, z/b\}$ | <i>kollisionsfrei</i> |
| σ_2 | $\{x/(x+z), z/(x+z)\}$ | <i>kollisionsfrei</i> |
| σ_3 | $\{x/(x+y), z/a\}$ | Kollision |
| σ_4 | $\{y/(x+y)\}$ | <i>kollisionsfrei</i> |
| σ_5 | $\{x/z\}$ | |

Kollisionsfreie Substitutionen

Es bezeichne F die Formel

$$p(x, z) \wedge \exists y(p(x, y) \wedge p(z, y) \rightarrow p(x, y))$$

Welche der folgenden Substitutionen ist kollisionsfrei für F ?

- | | | |
|------------|------------------------|-----------------------|
| σ_1 | $\{x/a, z/b\}$ | <i>kollisionsfrei</i> |
| σ_2 | $\{x/(x+z), z/(x+z)\}$ | <i>kollisionsfrei</i> |
| σ_3 | $\{x/(x+y), z/a\}$ | Kollision |
| σ_4 | $\{y/(x+y)\}$ | <i>kollisionsfrei</i> |
| σ_5 | $\{x/z\}$ | <i>kollisionsfrei</i> |

Theorem

Σ sei eine Signatur, \mathcal{D} eine Interpretation für Σ ,
 β, β' Belegungen, $A \in \text{For}_\Sigma$ und
 σ eine für A **kollisionsfreie** Substitution.

Dann gilt:

$$\text{val}_{\mathcal{D},\beta}(\sigma(A)) = \text{val}_{\mathcal{D},\beta'}(A),$$

wobei

$$\beta'(x) = \text{val}_{\mathcal{D},\beta}(\sigma(x))$$

für alle $x \in \text{Var}$.

Induktion nach A .

Exemplarisch: Schritt von A nach $\exists xA$.

Notation: val_{β} abkürzend für $val_{\mathcal{D},\beta}$.

Außerdem: $\sigma_x(x) = x$, $\sigma_x(y) = \sigma(y)$ für $y \neq x$.

Induktion nach A .

Exemplarisch: Schritt von A nach $\exists xA$.

Notation: val_{β} abkürzend für $val_{\mathcal{D},\beta}$.

Außerdem: $\sigma_x(x) = x$, $\sigma_x(y) = \sigma(y)$ für $y \neq x$.

$$val_{\beta}(\sigma(\exists xA)) = \mathbf{W}$$

$$\text{gdw } val_{\beta}(\exists x\sigma_x(A)) = \mathbf{W}$$

Anwendung von σ

Induktion nach A .

Exemplarisch: Schritt von A nach $\exists xA$.

Notation: val_{β} abkürzend für $val_{\mathcal{D},\beta}$.

Außerdem: $\sigma_x(x) = x$, $\sigma_x(y) = \sigma(y)$ für $y \neq x$.

$$val_{\beta}(\sigma(\exists xA)) = \mathbf{W}$$

$$\text{gdw } val_{\beta}(\exists x\sigma_x(A)) = \mathbf{W} \quad \text{Anwendung von } \sigma$$

$$\text{gdw } val_{\beta_x^d}(\sigma_x(A)) = \mathbf{W} \text{ für ein } d \in D \quad \text{Def. von } val$$

Induktion nach A .

Exemplarisch: Schritt von A nach $\exists xA$.

Notation: val_{β} abkürzend für $val_{\mathcal{D},\beta}$.

Außerdem: $\sigma_x(x) = x$, $\sigma_x(y) = \sigma(y)$ für $y \neq x$.

$$val_{\beta}(\sigma(\exists xA)) = \mathbf{W}$$

gdw $val_{\beta}(\exists x\sigma_x(A)) = \mathbf{W}$ Anwendung von σ

gdw $val_{\beta_x^d}(\sigma_x(A)) = \mathbf{W}$ für ein $d \in D$ Def. von val

gdw $val_{(\beta_x^d)''}(A) = \mathbf{W}$ **Ind.-Vor.**

wo $(\beta_x^d)''(y) = val_{\beta_x^d}(\sigma_x(y))$ für alle y .

Induktion nach A .

Exemplarisch: Schritt von A nach $\exists xA$.

Notation: val_{β} abkürzend für $val_{\mathcal{D},\beta}$.

Außerdem: $\sigma_x(x) = x$, $\sigma_x(y) = \sigma(y)$ für $y \neq x$.

$$val_{\beta}(\sigma(\exists xA)) = \mathbf{W}$$

gdw $val_{\beta}(\exists x\sigma_x(A)) = \mathbf{W}$ Anwendung von σ

gdw $val_{\beta_x^d}(\sigma_x(A)) = \mathbf{W}$ für ein $d \in D$ Def. von val

gdw $val_{(\beta_x^d)''}(A) = \mathbf{W}$ Ind.-Vor.

wo $(\beta_x^d)''(y) = val_{\beta_x^d}(\sigma_x(y))$ für alle y .

gdw $val_{(\beta')_x^d}(A) = \mathbf{W}$ Lücke

Induktion nach A .

Exemplarisch: Schritt von A nach $\exists xA$.

Notation: val_{β} abkürzend für $val_{\mathcal{D},\beta}$.

Außerdem: $\sigma_x(x) = x$, $\sigma_x(y) = \sigma(y)$ für $y \neq x$.

$$val_{\beta}(\sigma(\exists xA)) = \mathbf{W}$$

$$\text{gdw } val_{\beta}(\exists x\sigma_x(A)) = \mathbf{W} \quad \text{Anwendung von } \sigma$$

$$\text{gdw } val_{\beta_x^d}(\sigma_x(A)) = \mathbf{W} \text{ für ein } d \in D \quad \text{Def. von } val$$

$$\text{gdw } val_{(\beta_x^d)''} (A) = \mathbf{W} \quad \text{Ind.-Vor.}$$

$$\text{wo } (\beta_x^d)''(y) = val_{\beta_x^d}(\sigma_x(y)) \text{ für alle } y.$$

$$\text{gdw } val_{(\beta')_x^d} (A) = \mathbf{W} \quad \text{Lücke}$$

$$\text{gdw } val_{\beta'}(\exists xA) = \mathbf{W} \quad \text{Def. von } val$$

Der Beweis wird vollständig geführt sein, wenn wir die Lücke

$$(\beta_x^d)'' = (\beta')_x^d$$

schließen können. Wir müssen für jede Variable $y \in \text{Frei}(A)$ zeigen $(\beta_x^d)''(y) = (\beta')_x^d(y)$.

$$y = x:$$

$$(\beta_x^d)''(x) = \text{val}_{\beta_x^d}(\sigma_x(x)) \quad \text{Def. von } (\beta_x^d)''$$

Der Beweis wird vollständig geführt sein, wenn wir die Lücke

$$(\beta_x^d)'' = (\beta'_x)^d$$

schließen können. Wir müssen für jede Variable $y \in \text{Frei}(A)$ zeigen $(\beta_x^d)''(y) = (\beta'_x)^d(y)$.

$$y = x:$$

$$\begin{aligned}(\beta_x^d)''(x) &= \text{val}_{\beta_x^d}(\sigma_x(x)) && \text{Def. von } (\beta_x^d)'' \\ &= \text{val}_{\beta_x^d}(x) && \text{Def. von } \sigma_x\end{aligned}$$

Der Beweis wird vollständig geführt sein, wenn wir die Lücke

$$(\beta_x^d)'' = (\beta')_x^d$$

schließen können. Wir müssen für jede Variable $y \in \text{Frei}(A)$ zeigen $(\beta_x^d)''(y) = (\beta')_x^d(y)$.

$$y = x:$$

$$\begin{aligned}(\beta_x^d)''(x) &= \text{val}_{\beta_x^d}(\sigma_x(x)) && \text{Def. von } (\beta_x^d)'' \\ &= \text{val}_{\beta_x^d}(x) && \text{Def. von } \sigma_x \\ &= \beta_x^d(x) && \text{Def. von } \text{val} \text{ für Variable}\end{aligned}$$

Der Beweis wird vollständig geführt sein, wenn wir die Lücke

$$(\beta_x^d)'' = (\beta')_x^d$$

schließen können. Wir müssen für jede Variable $y \in \text{Frei}(A)$ zeigen $(\beta_x^d)''(y) = (\beta')_x^d(y)$.

$$y = x:$$

$$\begin{aligned}(\beta_x^d)''(x) &= \text{val}_{\beta_x^d}(\sigma_x(x)) && \text{Def. von } (\beta_x^d)'' \\ &= \text{val}_{\beta_x^d}(x) && \text{Def. von } \sigma_x \\ &= \beta_x^d(x) && \text{Def. von } \text{val} \text{ für Variable} \\ &= d && \text{Def. der modifizierten Belegung}\end{aligned}$$

Der Beweis wird vollständig geführt sein, wenn wir die Lücke

$$(\beta_x^d)'' = (\beta'_x)^d$$

schließen können. Wir müssen für jede Variable $y \in \text{Frei}(A)$ zeigen $(\beta_x^d)''(y) = (\beta'_x)^d(y)$.

$$y = x:$$

$(\beta_x^d)''(x)$	$=$	$\text{val}_{\beta_x^d}(\sigma_x(x))$	Def. von $(\beta_x^d)''$
	$=$	$\text{val}_{\beta_x^d}(x)$	Def. von σ_x
	$=$	$\beta_x^d(x)$	Def. von val für Variable
	$=$	d	Def. der modifizierten Belegung
	$=$	$(\beta'_x)^d(x)$	Def. der modifizierten Belegung

Beweis (Forts.)

Schließen der Lücke $(\beta_x^d)'' = (\beta')_x^d$

$y \neq x$, y frei in A :

$$(\beta_x^d)''(y) = \text{val}_{\beta_x^d}(\sigma_x(y))$$

Def. von $(\beta_x^d)''$

Beweis (Forts.)

Schließen der Lücke $(\beta_x^d)'' = (\beta')_x^d$

$y \neq x$, y frei in A :

$$\begin{aligned}
 (\beta_x^d)''(y) &= \text{val}_{\beta_x^d}(\sigma_x(y)) \\
 &= \text{val}_{\beta_x^d}(\sigma(y))
 \end{aligned}$$

Def. von $(\beta_x^d)''$
 Def. von σ_x

Beweis (Forts.)

Schließen der Lücke $(\beta_x^d)'' = (\beta')_x^d$

$y \neq x$, y frei in A :

$$\begin{aligned}
 (\beta_x^d)''(y) &= \text{val}_{\beta_x^d}(\sigma_x(y)) \\
 &= \text{val}_{\beta_x^d}(\sigma(y)) \\
 &= \text{val}_{\beta}(\sigma(y))
 \end{aligned}$$

Def. von $(\beta_x^d)''$

Def. von σ_x

da x nicht in $\sigma(y)$ vorkommt

Beweis (Forts.)

Schließen der Lücke $(\beta_x^d)'' = (\beta')_x^d$

$y \neq x$, y frei in A :

$$\begin{aligned}
 (\beta_x^d)''(y) &= \text{val}_{\beta_x^d}(\sigma_x(y)) \\
 &= \text{val}_{\beta_x^d}(\sigma(y)) \\
 &= \text{val}_{\beta}(\sigma(y))
 \end{aligned}$$

Def. von $(\beta_x^d)''$

Def. von σ_x

da x nicht in $\sigma(y)$ vorkommt

Kollisionsfreiheit von σ

Beweis (Forts.)

Schließen der Lücke $(\beta_x^d)'' = (\beta')_x^d$

$y \neq x$, y frei in A :

$$\begin{aligned}
 (\beta_x^d)''(y) &= \text{val}_{\beta_x^d}(\sigma_x(y)) \\
 &= \text{val}_{\beta_x^d}(\sigma(y)) \\
 &= \text{val}_{\beta}(\sigma(y)) \\
 &= \beta'(y)
 \end{aligned}$$

Def. von $(\beta_x^d)''$

Def. von σ_x

da x nicht in $\sigma(y)$ vorkommt

Kollisionsfreiheit von σ

Def. von β'

Beweis (Forts.)

Schließen der Lücke $(\beta_x^d)'' = (\beta')_x^d$

$y \neq x$, y frei in A :

$$\begin{aligned}
 (\beta_x^d)''(y) &= \text{val}_{\beta_x^d}(\sigma_x(y)) && \text{Def. von } (\beta_x^d)'' \\
 &= \text{val}_{\beta_x^d}(\sigma(y)) && \text{Def. von } \sigma_x \\
 &= \text{val}_{\beta}(\sigma(y)) && \text{da } x \text{ nicht in } \sigma(y) \text{ vorkommt} \\
 & && \text{Kollisionsfreiheit von } \sigma \\
 &= \beta'(y) && \text{Def. von } \beta' \\
 &= (\beta')_x^d(y) && \text{Def. der modifizierten Belegung}
 \end{aligned}$$

Sir Anthony „Tony“ Hoare



Sir C.A.R. Hoare (* 1934)

Studied philosophy at Oxford U.

Graduated from Moscow State U., 1959

Programmer for Elliott Brothers, 1960

Prof. of CS at Queen's U. Belfast, 1968

*An axiomatic basis for computer
programming*

Communications ACM, 1969

Oxford U. Programming Research, 1977

Microsoft Research, Cambridge, now

Zuweisungsregel im Hoare-Kalkül

$$\{\{x/s\}A\} x := s \{A\}$$

wobei die Substitution $\{x/s\}$ kollisionsfrei sein muß.

Zuweisungsregel im Hoare-Kalkül

$$\{\{x/s\}A\} x := s \{A\}$$

wobei die Substitution $\{x/s\}$ kollisionsfrei sein muß.

Die Zuweisungsregel besagt, daß

Zuweisungsregel im Hoare-Kalkül

$$\{\{x/s\}A\} x := s \{A\}$$

wobei die Substitution $\{x/s\}$ kollisionsfrei sein muß.

Die Zuweisungsregel besagt, daß

- ▶ ausgehend von einem Zustand, in dem die Formel $\{x/s\}A$ wahr ist,

Zuweisungsregel im Hoare-Kalkül

$$\{\{x/s\}A\} x := s \{A\}$$

wobei die Substitution $\{x/s\}$ kollisionsfrei sein muß.

Die Zuweisungsregel besagt, daß

- ▶ ausgehend von einem Zustand, in dem die Formel $\{x/s\}A$ wahr ist,
- ▶ nach Ausführung der Programmstücks $x := s$

Zuweisungsregel im Hoare-Kalkül

$$\{\{x/s\}A\} x := s \{A\}$$

wobei die Substitution $\{x/s\}$ kollisionsfrei sein muß.

Die Zuweisungsregel besagt, daß

- ▶ ausgehend von einem Zustand, in dem die Formel $\{x/s\}A$ wahr ist,
- ▶ nach Ausführung der Programmstücks $x := s$
- ▶ ein Zustand erreicht wird, in dem die Formel A gilt.

Hintergrund-Interpretation \mathcal{H} .

Programmzustand = Variablenbelegung β .

Hintergrund-Interpretation \mathcal{H} .

Programmzustand = Variablenbelegung β .

Gelte $val_{\mathcal{H},\beta}(\{x/s\}A) = W$

Nach der Zuweisung $x := s$ wird ein Zustand β' erreicht

$$\beta'(x) := val_{\mathcal{H},\beta}(s)$$

$$\beta'(y) := \beta(y) \text{ für } y \neq x$$

Hintergrund-Interpretation \mathcal{H} .

Programmzustand = Variablenbelegung β .

Gelte $val_{\mathcal{H},\beta}(\{x/s\}A) = W$

Nach der Zuweisung $x := s$ wird ein Zustand β' erreicht

$$\beta'(x) := val_{\mathcal{H},\beta}(s)$$

$$\beta'(y) := \beta(y) \text{ für } y \neq x$$

Die Regel behauptet $val_{\mathcal{H},\beta'}(A) = W$.

Hintergrund-Interpretation \mathcal{H} .

Programmzustand = Variablenbelegung β .

Gelte $val_{\mathcal{H},\beta}(\{x/s\}A) = W$

Nach der Zuweisung $x := s$ wird ein Zustand β' erreicht

$$\beta'(x) := val_{\mathcal{H},\beta}(s)$$

$$\beta'(y) := \beta(y) \text{ für } y \neq x$$

Die Regel behauptet $val_{\mathcal{H},\beta'}(A) = W$.

Das ist gerade die Aussage des Substitutionslemmas für die Formel A ist und die Substitution $\sigma = \{x/s\}$.

Anwendung des Substitutionslemmas

Theorem

*Sei Σ eine Signatur,
 \mathcal{D} eine Interpretation für Σ ,
 β eine Belegung und
 σ eine für A kollisionsfreie Substitution
mit $\sigma(y) = y$ für alle Variablen $y \neq x$,
dann gilt:*

Anwendung des Substitutionslemmas

Theorem

*Sei Σ eine Signatur,
 \mathcal{D} eine Interpretation für Σ ,
 β eine Belegung und
 σ eine für A kollisionsfreie Substitution
mit $\sigma(y) = y$ für alle Variablen $y \neq x$,
dann gilt:*

▶ $val_{\mathcal{D},\beta}(\forall xA \rightarrow \sigma(A)) = W$

Anwendung des Substitutionslemmas

Theorem

*Sei Σ eine Signatur,
 \mathcal{D} eine Interpretation für Σ ,
 β eine Belegung und
 σ eine für A kollisionsfreie Substitution
mit $\sigma(y) = y$ für alle Variablen $y \neq x$,
dann gilt:*

- ▶ $val_{\mathcal{D},\beta}(\forall xA \rightarrow \sigma(A)) = W$
- ▶ $val_{\mathcal{D},\beta}(\sigma(A) \rightarrow \exists xA) = W.$

Wir nehmen an, daß $val_{\mathcal{D},\beta}(\forall xA) = W$ gilt, d.h.

$$val_{\mathcal{D},\beta_x^d}(A) = W \text{ für alle } d \in D.$$

Wir nehmen an, daß $val_{\mathcal{D},\beta}(\forall xA) = W$ gilt, d.h.

$$val_{\mathcal{D},\beta_x^d}(A) = W \text{ für alle } d \in D.$$

Zu zeigen ist

$$val_{\mathcal{D},\beta}(\sigma(A)) = W$$

Beweis

Wir nehmen an, daß $val_{\mathcal{D},\beta}(\forall xA) = W$ gilt, d.h.

$$val_{\mathcal{D},\beta_x^d}(A) = W \text{ für alle } d \in D.$$

Zu zeigen ist

$$val_{\mathcal{D},\beta}(\sigma(A)) = W$$

Nach dem Substitutionslemma ist das gleichbedeutend mit

$$val_{\mathcal{D},\beta'}(A) = W$$

wobei

$$\beta'(y) = val_{\mathcal{D},\beta}(\sigma(y)) = \begin{cases} \beta(y) & \text{falls } x \neq y \\ val_{\mathcal{D},\beta}(\sigma(x)) & \text{falls } y = x \end{cases}$$

Beweis

Wir nehmen an, daß $val_{\mathcal{D},\beta}(\forall xA) = W$ gilt, d.h.

$$val_{\mathcal{D},\beta_x^d}(A) = W \text{ für alle } d \in D.$$

Zu zeigen ist

$$val_{\mathcal{D},\beta}(\sigma(A)) = W$$

Nach dem Substitutionslemma ist das gleichbedeutend mit

$$val_{\mathcal{D},\beta'}(A) = W$$

wobei

$$\beta'(y) = val_{\mathcal{D},\beta}(\sigma(y)) = \begin{cases} \beta(y) & \text{falls } x \neq y \\ val_{\mathcal{D},\beta}(\sigma(x)) & \text{falls } y = x \end{cases}$$

Also $\beta' = \beta_x^d$, wenn man $d = val_{\mathcal{D},\beta}(\sigma(x))$ wählt.

Die zweite Aussage läßt sich analog beweisen.

Den Modell- und Folgerungsbegriff definieren wir nur für Formeln und Formelmengen ohne freie Variablen. Das ist mit Abstand der häufigste Anwendungsfall. Der Fall mit freien Variablen wird ausführlich in den Übungsaufgaben im Skript behandelt.

Den Modell- und Folgerungsbegriff definieren wir nur für Formeln und Formelmengen ohne freie Variablen. Das ist mit Abstand der häufigste Anwendungsfall. Der Fall mit freien Variablen wird ausführlich in den Übungsaufgaben im Skript behandelt.

Definition

Den Modell- und Folgerungsbegriff definieren wir nur für Formeln und Formelmengen ohne freie Variablen. Das ist mit Abstand der häufigste Anwendungsfall. Der Fall mit freien Variablen wird ausführlich in den Übungsaufgaben im Skript behandelt.

Definition

- ▶ Eine Interpretation \mathcal{D} über Σ nennen wir ein **Modell** einer Formel A ohne freie Variablen über Σ , wenn $val_{\mathcal{D}}(A) = W$.

Den Modell- und Folgerungsbegriff definieren wir nur für Formeln und Formelmengen ohne freie Variablen. Das ist mit Abstand der häufigste Anwendungsfall. Der Fall mit freien Variablen wird ausführlich in den Übungsaufgaben im Skript behandelt.

Definition

- ▶ Eine Interpretation \mathcal{D} über Σ nennen wir ein **Modell** einer Formel A ohne freie Variablen über Σ , wenn $val_{\mathcal{D}}(A) = W$.
- ▶ \mathcal{D} heißt **Modell** einer Formelmenge M ohne freie Variablen, wenn für jede Formel $B \in M$ gilt $val_{\mathcal{D}}(B) = W$.

Definition

Es sei $M \subseteq For_{\Sigma}$, $A \in For_{\Sigma}$, beide ohne freie Variablen.

$$M \models_{\Sigma} A \quad :\Leftrightarrow$$

Jedes Modell von M ist auch Modell von A .

Lies: **Aus M folgt A** (über Σ).

Kurznotationen:

$$\models \text{ statt } \models_{\Sigma}, \quad \models A \text{ f\"ur } \emptyset \models A, \quad B \models A \text{ f\"ur } \{B\} \models A.$$

$M \models A$ gdw $M \cup \{\neg A\}$
hat kein Modell

Definition

$A \in For_{\Sigma}$ heißt

Definition

$A \in For_{\Sigma}$ heißt

- ▶ **allgemeingültig** gdw $\models A$

Definition

$A \in For_{\Sigma}$ heißt

- ▶ **allgemeingültig** gdw $\models A$
- ▶ **erfüllbar** gdw $\neg A$ ist nicht allgemeingültig.

Theorem

Theorem

1. *Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*

Theorem

1. *Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*
 - 1.1 *A allgemeingültig*

Theorem

1. *Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*
 - 1.1 *A allgemeingültig*
 - 1.2 *Jede Interpretation \mathcal{D} ist Modell von A.*

Theorem

1. *Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*
 - 1.1 *A allgemeingültig*
 - 1.2 *Jede Interpretation \mathcal{D} ist Modell von A.*
 - 1.3 *$val_{\mathcal{D}}(A) = W$ für alle \mathcal{D} .*

Theorem

1. *Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*
 - 1.1 *A allgemeingültig*
 - 1.2 *Jede Interpretation \mathcal{D} ist Modell von A.*
 - 1.3 *$val_{\mathcal{D}}(A) = W$ für alle \mathcal{D} .*
2. *Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*

Theorem

1. *Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*
 - 1.1 *A allgemeingültig*
 - 1.2 *Jede Interpretation \mathcal{D} ist Modell von A.*
 - 1.3 *$val_{\mathcal{D}}(A) = W$ für alle \mathcal{D} .*
2. *Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*
 - 2.1 *A erfüllbar*

Theorem

1. *Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*
 - 1.1 *A allgemeingültig*
 - 1.2 *Jede Interpretation \mathcal{D} ist Modell von A.*
 - 1.3 *$val_{\mathcal{D}}(A) = W$ für alle \mathcal{D} .*
2. *Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*
 - 2.1 *A erfüllbar*
 - 2.2 *Es gibt \mathcal{D} mit $val_{\mathcal{D}}(A) = W$*

Beispiele für allgemeingültige Formeln

1. $\neg \forall x A \leftrightarrow \exists x \neg A,$

Beispiele für allgemeingültige Formeln

1. $\neg\forall xA \leftrightarrow \exists x\neg A,$

2. $\neg\exists xA \leftrightarrow \forall x\neg A$

Beispiele für allgemeingültige Formeln

1. $\neg\forall xA \leftrightarrow \exists x\neg A,$
2. $\neg\exists xA \leftrightarrow \forall x\neg A$
3. $\forall x\forall yA \leftrightarrow \forall y\forall xA,$

Beispiele für allgemeingültige Formeln

1. $\neg\forall xA \leftrightarrow \exists x\neg A,$
2. $\neg\exists xA \leftrightarrow \forall x\neg A$
3. $\forall x\forall yA \leftrightarrow \forall y\forall xA,$
4. $\exists x\exists yA \leftrightarrow \exists y\exists xA$

Beispiele für allgemeingültige Formeln

1. $\neg\forall xA \leftrightarrow \exists x\neg A$,
2. $\neg\exists xA \leftrightarrow \forall x\neg A$
3. $\forall x\forall yA \leftrightarrow \forall y\forall xA$,
4. $\exists x\exists yA \leftrightarrow \exists y\exists xA$
5. $\forall x(A \wedge B) \leftrightarrow \forall xA \wedge \forall xB$

Beispiele für allgemeingültige Formeln

1. $\neg\forall xA \leftrightarrow \exists x\neg A,$
2. $\neg\exists xA \leftrightarrow \forall x\neg A$
3. $\forall x\forall yA \leftrightarrow \forall y\forall xA,$
4. $\exists x\exists yA \leftrightarrow \exists y\exists xA$
5. $\forall x(A \wedge B) \leftrightarrow \forall xA \wedge \forall xB$
6. $\exists x(A \vee B) \leftrightarrow \exists xA \vee \exists xB$

Beispiele für allgemeingültige Formeln

1. $\neg\forall xA \leftrightarrow \exists x\neg A$,
2. $\neg\exists xA \leftrightarrow \forall x\neg A$
3. $\forall x\forall yA \leftrightarrow \forall y\forall xA$,
4. $\exists x\exists yA \leftrightarrow \exists y\exists xA$
5. $\forall x(A \wedge B) \leftrightarrow \forall xA \wedge \forall xB$
6. $\exists x(A \vee B) \leftrightarrow \exists xA \vee \exists xB$
7. $\forall \vec{y}(A \wedge QxB \leftrightarrow Qx(A \wedge B))$,
falls $x \notin \text{Frei}(A)$ und \vec{y} alle freie Variablen in $A \wedge QxB$ sind.

Beispiele für allgemeingültige Formeln

1. $\neg \forall x A \leftrightarrow \exists x \neg A$,
2. $\neg \exists x A \leftrightarrow \forall x \neg A$
3. $\forall x \forall y A \leftrightarrow \forall y \forall x A$,
4. $\exists x \exists y A \leftrightarrow \exists y \exists x A$
5. $\forall x (A \wedge B) \leftrightarrow \forall x A \wedge \forall x B$
6. $\exists x (A \vee B) \leftrightarrow \exists x A \vee \exists x B$
7. $\forall \vec{y} (A \wedge Qx B \leftrightarrow Qx (A \wedge B))$,
falls $x \notin \text{Frei}(A)$ und \vec{y} alle freie Variablen in $A \wedge Qx B$ sind.
8. $\forall \vec{y} (A \vee Qx B \leftrightarrow Qx (A \vee B))$,
falls $x \notin \text{Frei}(A)$ und \vec{y} alle freie Variablen in $A \wedge Qx B$ sind.

Zeige

Für alle \mathcal{D}, β gilt $val_{\mathcal{D}, \beta}(A \rightarrow \forall x B) = val_{\mathcal{D}, \beta}(\forall x(A \rightarrow B))$
Voraussetzung: $x \notin \text{Frei}(A)$.

Falls $val_{\mathcal{D}, \beta}(A \rightarrow \forall x B) = W$, dann folgt unmittelbar aus der Definition von val $val_{\mathcal{D}, \beta}(\forall x(A \rightarrow B)) = W$ (Übung).

Zeige

Für alle \mathcal{D}, β gilt $val_{\mathcal{D}, \beta}(A \rightarrow \forall x B) = val_{\mathcal{D}, \beta}(\forall x(A \rightarrow B))$
Voraussetzung: $x \notin \text{Frei}(A)$.

Falls $val_{\mathcal{D}, \beta}(A \rightarrow \forall x B) = W$, dann folgt unmittelbar aus der Definition von val $val_{\mathcal{D}, \beta}(\forall x(A \rightarrow B)) = W$ (Übung).

Sei jetzt $val_{D, I, \beta}(\forall x(A \rightarrow B)) = W$, d. h. für alle $d \in D$:
 $(val_{D, \beta_x^d}(A) = W \Rightarrow val_{D, I, \beta_x^d}(B) = W)$. (*)

Zeige

Für alle \mathcal{D}, β gilt $val_{\mathcal{D}, \beta}(A \rightarrow \forall x B) = val_{\mathcal{D}, \beta}(\forall x(A \rightarrow B))$
Voraussetzung: $x \notin \text{Frei}(A)$.

Falls $val_{\mathcal{D}, \beta}(A \rightarrow \forall x B) = W$, dann folgt unmittelbar aus der Definition von val $val_{\mathcal{D}, \beta}(\forall x(A \rightarrow B)) = W$ (Übung).

Sei jetzt $val_{\mathcal{D}, \beta}(\forall x(A \rightarrow B)) = W$, d. h. für alle $d \in D$:
 $(val_{\mathcal{D}, \beta_x^d}(A) = W \Rightarrow val_{\mathcal{D}, \beta_x^d}(B) = W)$. (*)

Angenommen, es wäre $val_{\mathcal{D}, \beta}(A \rightarrow \forall x B) = F$. Dann gilt also
 $val_{\mathcal{D}, \beta}(A) = W$ und $val_{\mathcal{D}, \beta}(\forall x B) = F$
es gibt also ein $e \in D$ mit $val_{\mathcal{D}, \beta_x^e}(B) = F$.

Zeige

Für alle \mathcal{D}, β gilt $val_{\mathcal{D}, \beta}(A \rightarrow \forall x B) = val_{\mathcal{D}, \beta}(\forall x(A \rightarrow B))$
Voraussetzung: $x \notin \text{Frei}(A)$.

Falls $val_{\mathcal{D}, \beta}(A \rightarrow \forall x B) = W$, dann folgt unmittelbar aus der Definition von val $val_{\mathcal{D}, \beta}(\forall x(A \rightarrow B)) = W$ (Übung).

Sei jetzt $val_{\mathcal{D}, I, \beta}(\forall x(A \rightarrow B)) = W$, d. h. für alle $d \in D$:
 $(val_{\mathcal{D}, \beta_x^d}(A) = W \Rightarrow val_{\mathcal{D}, I, \beta_x^d}(B) = W)$. (*)

Angenommen, es wäre $val_{\mathcal{D}, I, \beta}(A \rightarrow \forall x B) = F$. Dann gilt also
 $val_{\mathcal{D}, \beta}(A) = W$ und $val_{\mathcal{D}, \beta}(\forall x B) = F$
es gibt also ein $e \in D$ mit $val_{\mathcal{D}, \beta_x^e}(B) = F$.

Wegen $x \notin \text{Frei}(A)$ gilt auch $val_{\mathcal{D}, \beta_x^e}(A) = W$. Aus (*) folgt somit der Widerspruch: $val_{\mathcal{D}, \beta_x^e}(B) = W$.

Beispiel für ein Folgerbarkeitsproblem

Gilt folgendes?

$$\left. \begin{array}{l} \forall x \forall y \forall z (r(x, y) \wedge r(y, z) \rightarrow r(x, z)) \\ \forall x \forall y (r(x, y) \rightarrow r(y, x)) \\ \forall x \exists y (r(x, y)) \end{array} \right\} \models \forall x r(x, x)$$

Gilt folgendes?

$$\left. \begin{array}{l} \forall x \forall y \forall z (r(x, y) \wedge r(y, z) \rightarrow r(x, z)) \\ \forall x \forall y (r(x, y) \rightarrow r(y, x)) \\ \forall x \exists y (r(x, y)) \end{array} \right\} \models \forall x r(x, x)$$

Anders gesagt:

$$\left. \begin{array}{l} \text{Transitivität} \\ \text{Symmetrie} \\ \text{Endlosigkeit} \end{array} \right\} \models \text{Reflexivität}$$

Gilt folgendes?

$$\left. \begin{array}{l} \forall x \forall y \forall z (r(x, y) \wedge r(y, z) \rightarrow r(x, z)) \\ \forall x \forall y (r(x, y) \rightarrow r(y, x)) \\ \forall x \exists y (r(x, y)) \end{array} \right\} \models \forall x r(x, x)$$

Anders gesagt:

$$\left. \begin{array}{l} \text{Transitivität} \\ \text{Symmetrie} \\ \text{Endlosigkeit} \end{array} \right\} \models \text{Reflexivität}$$

Die Antwort ist

JA

2. Beispiel für ein Folgerbarkeitsproblem

Gilt folgendes?

$$\neg \exists x (a < x \wedge c(x) \wedge \forall y (a \leq y < x \rightarrow b(y)))$$

\models

$$\exists x (a < x \wedge \neg c(x) \wedge \forall y (a \leq y < x \rightarrow \neg b(y)))$$

2. Beispiel für ein Folgerbarkeitsproblem

Gilt folgendes?

$$\neg \exists x (a < x \wedge c(x) \wedge \forall y (a \leq y < x \rightarrow b(y)))$$

\models

$$\exists x (a < x \wedge \neg c(x) \wedge \forall y (a \leq y < x \rightarrow \neg b(y)))$$

Gegenbeispiel:

a		p_1		p_2
\cdot	$<$	\cdot	$<$	\cdot
$b(a)$		$\neg b(p_1)$		$\neg b(p_2)$
$\neg c(a)$		$\neg c(p_1)$		$c(p_2)$