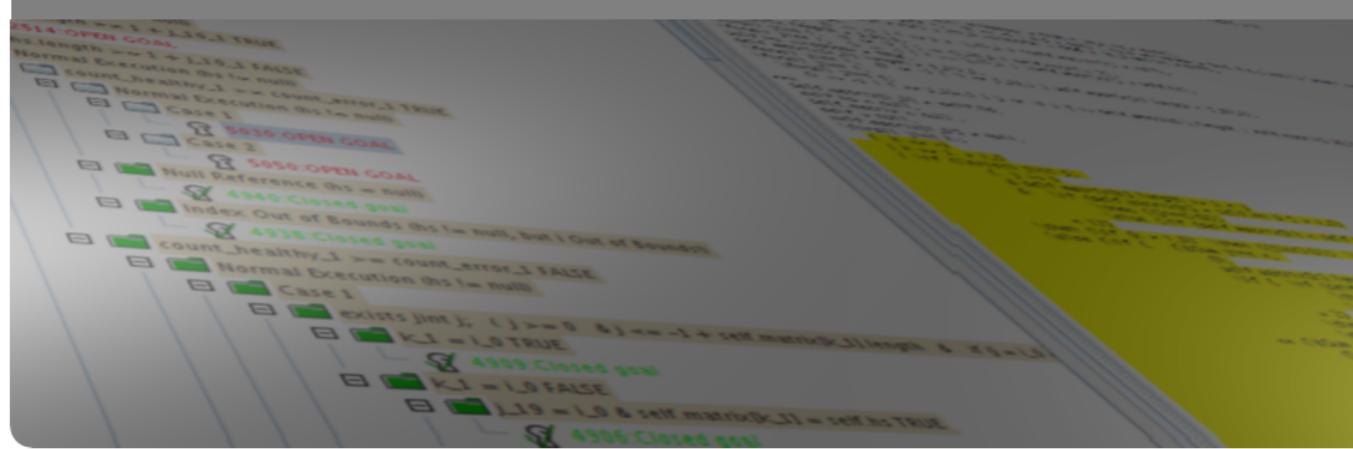


Formale Systeme

Prof. Dr. Bernhard Beckert, WS 2016/2017

Prädikatenlogik: Tableaukalkül (ohne Gleichheit)

KIT – INSTITUT FÜR THEORETISCHE INFORMATIK



Tableaukalkül

Uniforme Notation

Typ α :

F	F_1	F_2
$1 \neg A$	$0A$	-
$0 \neg A$	$1A$	-
$1A \wedge B$	$1A$	$1B$
$0A \vee B$	$0A$	$0B$
$0A \rightarrow B$	$1A$	$0B$

Typ β

F	F_1	F_2
$0A \wedge B$	$0A$	$0B$
$1A \vee B$	$1A$	$1B$
$1A \rightarrow B$	$0A$	$1B$

Typ γ :

F	F_1
$1 \forall x A(x)$	$1A(x)$
$0 \exists x A(x)$	$0A(x)$

Typ δ :

F	F_1
$1 \exists x A(x)$	$1A(x)$
$0 \forall x A(x)$	$0A(x)$

Zusammenfassung der Tableauregeln

α -Regel	$\frac{F}{F_1 \\ F_2}$	für α -Formeln F
β -Regel	$\frac{F}{F_1 F_2}$	für β -Formeln F
γ -Regel	$\frac{F}{F_1(y)}$	für γ -Formeln F und eine neue Variable y
δ -Regel	$\frac{F}{F_1(f(x_1, \dots, x_n))}$	für δ -Formeln F , wobei x_1, \dots, x_n alle freien Variablen in F sind und f ein neues n -stelliges Funktionssymbol

Zusammenfassung der Tableauregeln

(Forts.)

Anfangsregel $\frac{}{0A}$ für die zu beweisende Formel A

A ohne freie Variable

V -Regel $\frac{}{1B}$ für jedes $B \in M,$

B ohne freie Variablen

Geschlossene Tableaus

Sei T ein Tableau, π ein Pfad in T und σ eine Substitution.

Definition

σ schließt π , wenn es

- ▶ Formeln B, C gibt, so daß $\sigma(B) = \sigma(C)$, σ kollisionsfrei für B und C ist und $1B, 0C$ auf π liegen oder
- ▶ eine der Formeln **01** oder **10** liegt auf π .

σ schließt ein Tableau T , wenn σ alle seine Pfade schließt .

Abschlußregel

Die Abschlußregel oder C-Regel:

Aus einem Tableau T erzeuge ein Tableau T_1
durch Wahl eines Pfades π und einer Substitution σ , die π
schließt, und
Anwendung von σ auf das ganze Tableau T .

Ein einfaches Beispiel

0	$\forall x \ p(x) \rightarrow \exists y \ p(y)$	(Start)
1	$\forall x \ p(x)$	(α -Regel)
0	$\exists y \ p(y)$	(α -Regel)
1	$p(X)$	(γ -Regel)
0	$p(Y)$	(γ -Regel)

Aus der zu beweisenden Aussage entsteht durch Anwendung der α - und γ -Regel das linke Tableau.

Ein einfaches Beispiel

$0 \forall x p(x) \rightarrow \exists y p(y)$ (Start)

$1 \forall x p(x)$

$\alpha\text{-Regel}$

$0 \exists y p(y)$

$\alpha\text{-Regel}$

$1 p(X)$

$\gamma\text{-Regel}$

$0 p(\textcolor{blue}{Y})$

$\gamma\text{-Regel}$

$0 \forall x p(x) \rightarrow \exists y p(y)$

$1 \forall x p(x)$

$0 \exists y p(y)$

$1 p(X)$

$0 p(\textcolor{red}{X})$

C-Regel

\Rightarrow

$\{\textcolor{blue}{Y}/\textcolor{red}{X}\}$

Aus der zu beweisenden Aussage entsteht durch Anwendung der α - und γ -Regel das linke Tableau, daraus dann das rechts stehende durch Anwendung der C-Regel.

Ein geschlossenes Tableau

1[] 0 $\exists y \forall x p(x, y) \rightarrow \forall x \exists y p(x, y)$

2[1] 1 $\exists y \forall x p(x, y)$

3[1] 0 $\forall x \exists y p(x, y)$

4[2] 1 $\forall x p(x, a)$

5[3] 0 $\exists y p(b, y)$

6[4] 1 $p(X, a)$

7[5] 0 $p(b, Y)$

geschlossen mit $\sigma(X) = b$ und $\sigma(Y) = a$

Ein offenes Tableau

- 1[] $0\forall x \exists y p(x, y) \rightarrow \exists y \forall x p(x, y)$
- 2[1] $0\exists y \forall x p(x, y)$
- 3[1] $1\forall x \exists y p(x, y)$
- 4[2] $0\forall x p(x, Y)$
- 5[3] $1\exists y p(X, y)$
- 6[4] $0p(f(Y), Y)$
- 7[5] $1p(X, g(X))$

$p(f(Y), Y)$ und $p(X, g(X))$ sind nicht unifizierbar
es müßte gelten

$$\sigma(X) = \sigma(f(Y)) \text{ und } \sigma(Y) = \sigma(g(X))$$

$$\text{also } \sigma(X) = f(g(\sigma(X)))$$

Mehrfache Anwendung der γ -Regel

Beweisaufgabe: $p(0) \wedge \forall x(p(x) \rightarrow p(s(x))) \models p(s(s(0)))$
Tableaubeweis:

1[] 1 $p(0)$

2[] 1 $\forall x(p(x) \rightarrow p(s(x)))$

3[] 0 $p(s(s(0)))$

4[2] 1 $p(X) \rightarrow p(s(X))$

5[4] 0 $p(X)$

$$\sigma_1(X) = 0$$

5a 0 $p(0)$

6[4] 1 $p(s(X))$

6a 1 $p(s(0))$

7[2] 1 $p(Y) \rightarrow p(s(Y))$

8[7] 0 $p(Y)$

$$\sigma_2(Y) = s(0)$$

8a 0 $p(s(0))$

9[7] 1 $p(s(Y))$

9a 1 $p(s(s(0)))$

Korrektheit

und

Vollständigkeit

Modellbegriff für Tableaus

Definition

Es seien $A \in For_{\Sigma}$, $M \subseteq For_{\Sigma}$,

T ein Tableau für A über M und

\mathcal{D} eine Interpretation über $\bar{\Sigma}$,

wobei $\bar{\Sigma} = \Sigma \cup \{f \mid f \text{ neues Funktionssymbol in } T\}$.

\mathcal{D} heißt **Modell von T über M** gdw. gilt

- ▶ \mathcal{D} ist Modell von M
- ▶ zu jeder Variablenbelegung β gibt es einen Pfad π in T mit
 $val_{\mathcal{D},\beta}(V) = W$ für alle V auf π .

Korrektheitslemma

1. Teil

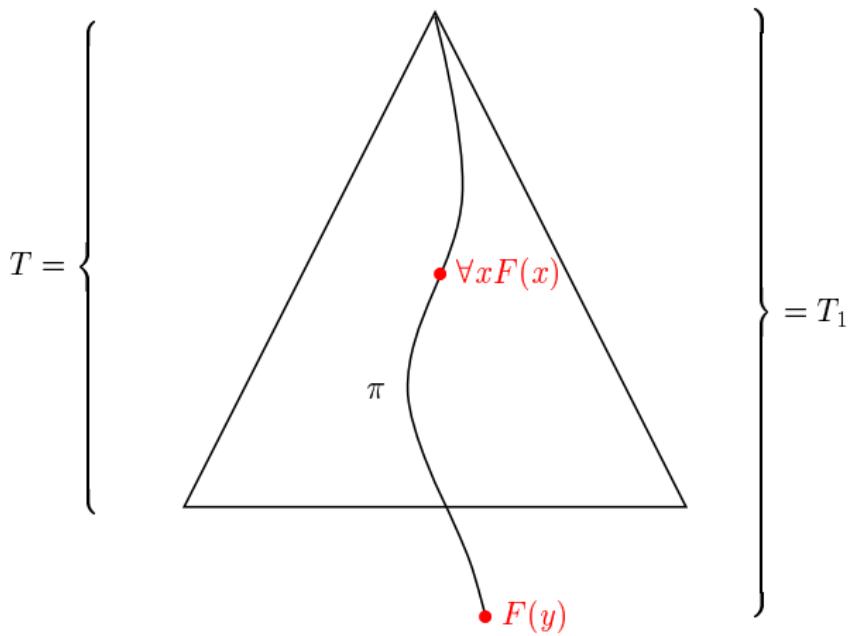
Theorem

M sei eine Formelmenge.

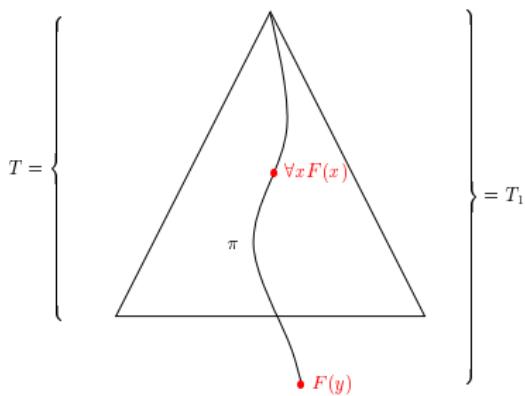
Das Tableau T' über M gehe aus T über M durch Anwendung einer Tableauregel hervor.

Hat T ein Modell über M, dann auch T'.

Beweis des Korrektheitslemma, γ -Fall



Beweis des Korrektheitslemma, γ -Fall

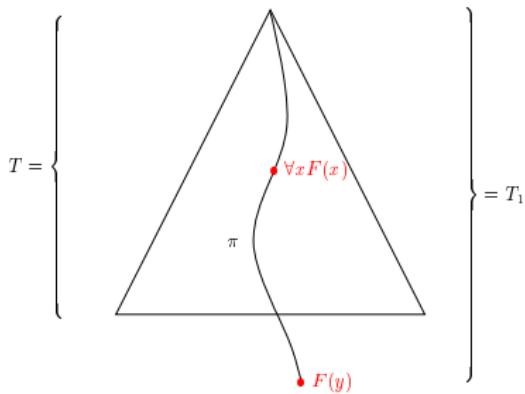


\mathcal{D} sei ein Modell von T über M . Wir zeigen, daß \mathcal{D} auch Modell von T_1 ist.

Sei β eine Belegung und π_0 ein Pfad in T mit $(\mathcal{D}, \beta) \models \pi_0$.

Wenn $\pi_0 \neq \pi$, ist π_0 unverändert ein Pfad in T_1 , fertig.

Beweis des Korrektheitslemma, γ -Fall

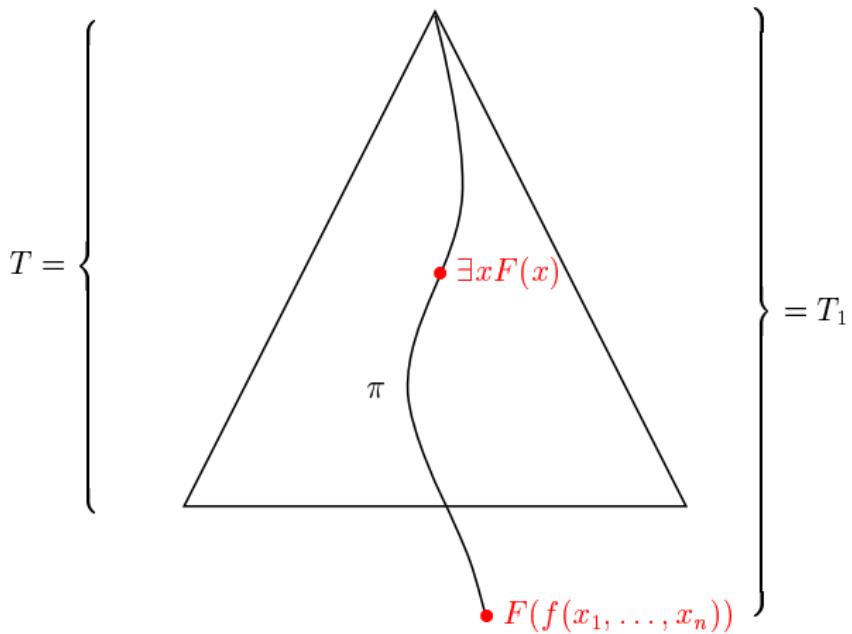


\mathcal{D} sei ein Modell von T über M . Wir zeigen, daß \mathcal{D} auch Modell von T_1 ist.

Sei β eine Belegung und $(\mathcal{D}, \beta) \models \pi$, i.e. $\pi_0 = \pi$.

Aus $(\mathcal{D}, \beta) \models \forall x F$ folgt insbesondere $(\mathcal{D}, \beta) \models F(y)$, also $(\mathcal{D}, \beta) \models \pi \cup \{F(y)\}$.

Beweis des Korrektheitslemma, δ -Fall



Beweis des Korrektheitslemma, δ -Fall

Nach Voraussetzung sei \mathcal{D} Modell von T über M .

Wir konstruieren eine Interpretation \mathcal{D}' , die sich von \mathcal{D} nur darin unterscheidet, daß dem Funktionszeichen f eine Interpretation $f^{\mathcal{D}'}$ zugeordnet wird.

$$f^{\mathcal{D}'}(d_1, \dots, d_n) = d?$$

Für $d_1, \dots, d_n \in D$ und β mit $\beta(x_i) = d_i$ für $i = 1, \dots, n$ gilt entweder

$$(\mathcal{D}, \beta) \models \exists x F$$

in diesem Fall gibt es ein $d \in D$ mit

$$(\mathcal{D}, \beta_x^d) \models F(x)$$

oder $(\mathcal{D}, \beta) \models \exists x F$ gilt nicht. Im letzten Fall wählen wir einen beliebigen Wert $d \in D$.

Beweis des Korrektheitslemma, δ -Fall

(Forts.)

Wir wollen zeigen, daß \mathcal{D}' Modell von T' ist.

Es sei β eine beliebige Belegung bzgl. \mathcal{D}' , β ist auch Belegung bzgl. \mathcal{D} , da sich der Grundbereich nicht geändert hat.

Es gibt π_0 in T mit $(\mathcal{D}, \beta) \models \pi_0$.

Nur der Fall $\pi_0 = \pi$ ist interessant.

Aus $(\mathcal{D}, \beta) \models \exists x F(x_1, \dots, x_n)$ folgt nach Konstruktion von \mathcal{D}' auch

$$(\mathcal{D}', \beta) \models F(f(x_1, \dots, x_n))$$

Da in den restlichen Formeln des Pfades π und in M das Zeichen f nicht vorkommt, erhalten wir insgesamt

$$(\mathcal{D}', \beta) \models \pi \cup \{F(f(x_1, \dots, x_n))\} \text{ und } (\mathcal{D}', \beta) \models M.$$

Korrektheitslemma

2. Teil

Theorem

- ▶ Ist \mathcal{D} Modell von T über M
- ▶ und entsteht T' aus T durch Schließen eines Pfades,
- ▶ dann ist \mathcal{D} auch Modell von T' .

Beweis des Korrektheitslemma

2. Teil

Voraussetzung: zu jeder Belegung β gibt es einen Pfad π in T mit $(\mathcal{D}, \beta) \models \pi$.

T' entstehe durch Anwenden der Substitution σ und Schließen eines Pfades gemäß einer der beiden Möglichkeiten in der Definition. Sei β' eine beliebige Belegung.

Zu $\beta(y) = \text{val}_{\beta'}(\sigma(y))$ gibt es einen Pfad π mit $(\mathcal{D}, \beta) \models \pi$.

Nach dem Substitutionslemma gilt für alle C

$$(\mathcal{D}, \beta) \models C \text{ gdw. } (\mathcal{D}, \beta') \models \sigma(C)$$

also:

$$(\mathcal{D}, \beta') \models \sigma(\pi)$$

Anfangstableau

Sei $A \in For_{\Sigma}$, $M \subseteq For_{\Sigma}$, alle ohne freie Variablen.

Das Anfangstableau T_0 für diese Beweisaufgabe besteht aus einem einzigen Pfad auf dem genau die folgenden Formeln liegen

- ▶ 0A
- ▶ 1B für alle $B \in M$

Beobachtungen

- ▶ T_0 für A über M ist unerfüllbar genau dann wenn, $M \models A$.
- ▶ ein geschlossenes Tableau ist unerfüllbar

Theorem

Sei $A \in For_{\Sigma}$, $M \subseteq For_{\Sigma}$, alle ohne freie Variablen

Wenn es ein geschlossenes Tableau für A über M gibt, dann ist $M \models A$.

Beweis:

T_0	Anfangstableau	nicht erfüllbar
:		
T_k	Zwischentableau	nicht erfüllbar Korrektheitslemma
T_{k+1}	Zwischentableau	nicht erfüllbar
:		
T_n	geschlossenes Tableau	nicht erfüllbar

Ein offenes Tableau

Vorbereitung auf den Vollständigkeitsbeweis

$$1[] \quad 0 \forall x \exists y p(x, y) \rightarrow \exists y \forall x p(x, y)$$

$$2[1] \quad 0 \exists y \forall x p(x, y)$$

$$3[1] \quad 1 \forall x \exists y p(x, y)$$

$$4[2] \quad 0 \forall x p(x, Y)$$

$$5[3] \quad 1 \exists y p(X, y)$$

$$6[4] \quad 0 p(f(Y), Y)$$

$$7[5] \quad 1 p(X, g(X))$$

offener Pfad π

Noch nicht (abschließend) behandelte Formeln

Modell \mathcal{D} für alle Formeln in π :

$$D = \{a, b\}$$

$$f^{\mathcal{D}}(x) = \begin{cases} b & \text{falls } x = a \\ a & \text{falls } x = b \end{cases}$$

$$g^{\mathcal{D}}(x) = x$$

$$p^{\mathcal{D}}(x, y) \Leftrightarrow x = y$$

Ein offenes Tableau

Vorbereitung auf den Vollständigkeitsbeweis

- 1[] $0 \forall x \exists y p(x, y) \rightarrow \exists y \forall x p(x, y)$
- 2[1] $0 \exists y \forall x p(x, y)$
- 3[1] $1 \forall x \exists y p(x, y)$
- 4[2] $0 \forall x p(x, Y)$
- 5[3] $1 \exists y p(X, y)$
- 6[4] $0 p(f(Y), Y)$
- 7[5] $1 p(X, g(X))$
- 8[2] $0 \forall x p(x, V)$
- 9[3] $1 \exists y p(U, y)$
- 10[8] $0 p(f'(V), V)$
- 11[9] $1 p(U, g'(U))$
- offener Pfad π

Noch nicht (abschließend) behandelte Formeln

Hintikka-Menge

Definition

Eine Menge H geschlossener Vorzeichenformeln über einer Signatur Σ heißt eine **Hintikka-Menge**, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

- (H 1) Gilt für eine α -Formel F , $F \in H$,
dann auch $F_1 \in H$ und $F_2 \in H$.
- (H 2) Gilt $F \in H$ für eine β -Formel F ,
dann auch $F_1 \in H$ oder $F_2 \in H$.
- (H 3) Gilt $F \in H$ für eine δ -Formel F ,
dann gibt es einen Grundterm t mit $F_1(t) \in H$.
- (H 4) Gilt $F \in H$ für eine γ -Formel F ,
dann gilt $F_1(t) \in H$ für jeden Grundterm t .
- (H 5) Für keine A kommen $1A$ und $0A$ in H vor.

Modell-Lemma

Theorem

Jede Hintikka-Menge H besitzt ein Modell.

Beweis:

Wir setzen

$$D = \{t : t \text{ ein Grundterm}\}$$

Die Interpretationsfunktion I wird definiert durch

$$I(f)(t_1, \dots, t_n) = f(t_1, \dots, t_n)$$

$$(t_1, \dots, t_n) \in I(p) \Leftrightarrow 1p(t_1, \dots, t_n) \in H$$

Beweis des Modell-Lemmas (Forts. 1)

Mit der obigen Definition gilt für jeden Grundterm:

$$I(t) = t$$

Wir beweisen diese Behauptung durch Induktion über den Termaufbau.

Für $t = c$, ein Konstantensymbol, gilt nach Definition

$$I(c) = c.$$

Sei jetzt $t = f(t_1, \dots, t_n)$:

$$\begin{aligned} I(t) &= I(f)(t_1^{\mathcal{D}}, \dots, t_n^{\mathcal{D}}) && (\text{Def. von } I(t)) \\ &= I(f)(t_1, \dots, t_n) && (\text{Ind.Vor.}) \\ &= f(t_1, \dots, t_n) && (\text{Def. von } I(f)) \end{aligned}$$

Beweis des Modell-Lemmas (Forts. 2)

Es bleibt, um den Beweis des Modell-Lemmas zu vervollständigen, noch nachzuweisen, daß für jede Formel $F \in H$ gilt

$$(D, I) \models F.$$

Dieser Nachweis wird wieder durch Induktion über den Aufbau von F geführt.

(Man beachte, daß H nur geschlossene Formeln enthält.)

1. Fall: $F = 1p(t_1, \dots, t_n)$

Falls $F \in H$, dann gilt $\mathcal{D} \models F$ nach Definition von \mathcal{D} .

2. Fall: $F = 0p(t_1, \dots, t_n)$.

Wenn $F \in H$, dann gilt wegen (H 6)

$1p(t_1, \dots, t_n) \notin H$. Nach Definition von (D, I) also $(D, I) \not\models p(t_1, \dots, t_n)$, d. h. $(D, I) \models \neg p(t_1, \dots, t_n)$

Die weiteren Induktionsschritte sind jetzt einfache Konsequenzen aus (H 1) bis (H 4).

Konstruktionsvorschrift

Es sei t_1, \dots, t_n, \dots eine Aufzählung aller Grundterme.

Parallel zur Konstruktion einer Folge von Tableaus \mathcal{T}_i wird eine Folge von Grundsubstitutionen σ_i erzeugt.

Entsteht \mathcal{T}_{i+1} aus \mathcal{T}_i durch Anwendung einer γ -Regel mit der Formel F auf dem Pfad π dann ist

$$\sigma_{i+1} = \{X/t_n\} \circ \sigma_i,$$

wobei X die neu eingeführte Variable ist und es sich um die n -te Anwendung der γ -Regel für F auf π handelt.

Sonst $\sigma_{i+1} = \sigma_i$.

Ein Pfad π im Tableau \mathcal{T}_i wird nicht erweitert, wenn $\sigma_i(\pi)$ abgeschlossen ist.

Vollständigkeit des Tableaukalküls

Theorem

Sei A eine Formel und M eine Menge von Formeln jeweils ohne freie Variablen.

Gilt

$$M \models A$$

dann terminiert jedes

- ▶ faire Verfahren,
- ▶ das mit $0A$ und $\sigma_0 = id$ beginnt,
- ▶ und die Konstruktionsvorschrift einhält

nach endlich vielen Schritten in einem geschlossenen Tableau.

Fairness bedeutet, daß auf jedem Pfad, jede mögliche Regelanwendung auch schließlich stattfindet.

Insbesondere wird auf jedem offenen Pfad jede γ -Formel unbeschränkt oft benutzt.

und jede Formel aus M kommt einmal dran

Königs Lemma

In jedem unendlichen,
endlich verzweigenden
Baum existiert ein
unendlicher Pfad.

Beweisansatz

Angenommen die fair konstruierte Folge $(\mathcal{T}_0, \sigma_0), \dots, (\mathcal{T}_n, \sigma_n) \dots$ terminiert nicht.

Wir wollen eine Modell \mathcal{D} finden mit $\mathcal{D} \models M$ und $\mathcal{D} \models \neg A$

Setze $\mathcal{T} = \bigcup_{i \geq 0} \mathcal{T}_i$ und $\sigma = \bigcup_{i \geq 0} \sigma_i$.

$\sigma(\mathcal{T})$ ist ein unendlicher endlich verzweigender Baum.

Nach Königs Lemma gibt es einen unendlichen Pfad π in $\sigma(\mathcal{T})$.

Noch Konstruktion muß π ein offener Pfad sein.

$H = \pi$ ist eine Hintikka- Menge.

Hintikka-Menge

Wiederholung

Definition

Eine Menge H geschlossener Vorzeichenformeln über einer Signatur Σ heißt eine **Hintikka-Menge**, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

- (H 1) Gilt für eine α -Formel F , $F \in H$,
dann auch $F_1 \in H$ und $F_2 \in H$.
- (H 2) Gilt $F \in H$ für eine β -Formel F ,
dann auch $F_1 \in H$ oder $F_2 \in H$.
- (H 3) Gilt $F \in H$ für eine δ -Formel F ,
dann gibt es einen Grundterm t mit $F_1(t) \in H$.
- (H 4) Gilt $F \in H$ für eine γ -Formel F ,
dann gilt $F_1(t) \in H$ für jeden Grundterm t .
- (H 5) Für keine A kommen $1A$ und $0A$ in H vor.

Unentscheidbarkeit der Prädikatenlogik

Theorem

Die folgenden Probleme sind unentscheidbar:

1. *Ist eine prädikatenlogische Formel $F \in \text{For}_\Sigma$ allgemeingültig?*
Triviale Signaturen Σ ausgenommen.
2. *Was ist die maximale Anzahl von γ -Regelanwendungen in einem Tableaubeweis einer prädikatenlogischen Formel $F \in \text{For}_\Sigma$?*

Rekursionstheoretische Eigenschaften der Prädikatenlogik

Theorem

1. *Die Menge der allgemeingültigen Formeln der Prädikatenlogik ist rekursiv aufzählbar.*
2. *Die Menge der erfüllbaren Formeln der Prädikatenlogik ist nicht rekursiv aufzählbar.*