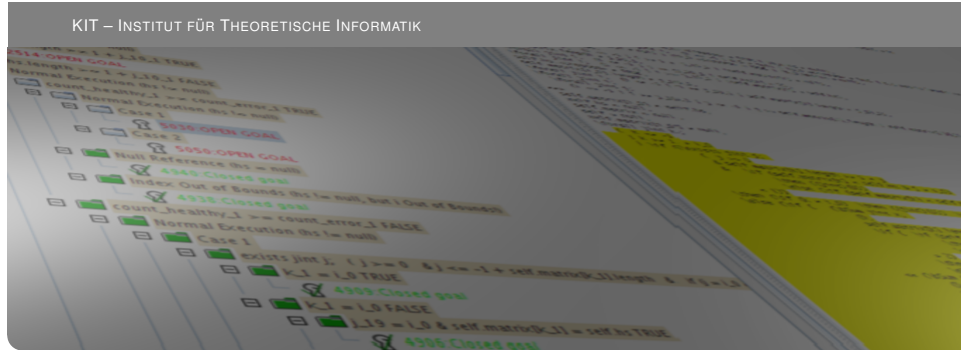


# Formale Systeme

Prof. Dr. Bernhard Beckert, WS 2016/2017

Endliche Automaten

KIT – INSTITUT FÜR THEORETISCHE INFORMATIK



# Endliche Automaten

## Wiederholung

# Deterministische endliche Automaten

## Definition

Ein endlicher Automat ist gegeben durch

- ▶ eine endliche Menge  $S$  von Zuständen
- ▶ ein Alphabet  $V$  (terminale Zeichen)
- ▶ einer Übergangsfunktion  $\delta : S \times V \rightarrow S$
- ▶ ein Anfangszustand  $s_0 \in S$
- ▶ eine nichtleere Teilmenge  $S_1 \subseteq S$  als Menge von Endzuständen

Die Übergangsfunktion  $\delta : S \times V \rightarrow S$  wird fortgesetzt zu  
 $\delta : S \times V^* \rightarrow S$ :

$$\delta(s, \varepsilon) = s$$

$$\delta(s, aw_1) = \delta(s', w_1) \text{ wobei } \delta(s, a) = s'$$

## Definition von $L(EA)$

Jeder endliche Automat  $EA$  akzeptiert eine Menge von Wörtern  $L(EA)$ .

$$L(EA) = \{w \in V^* \mid \delta(s_0, w) \in S_1\}$$

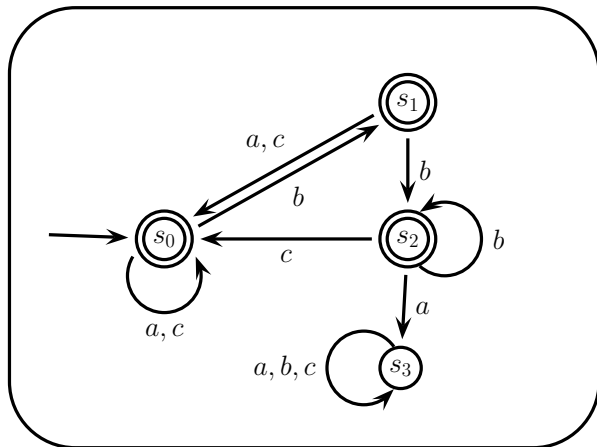
## Variante

Gelegentlich wird in Beispielen die Übergangsfunktion  $\delta$  nicht für alle Paare  $(s, a)$  definiert.

Wird während der Abarbeitung eines Wortes  $w$  eine Situation  $(s, a)$  erreicht, für die  $\delta(s, a)$  nicht definiert ist, so gilt  $w$  als nicht akzeptiert.

Ein endlicher Automat, so daß  $\delta(s, a)$  für alle  $s \in S$  und  $a \in V$  definiert ist, heißt ein **vollständiger endlicher Automat**.

# Der Beispielautomat $N_{bba}$



$$V = \{a, b, c\}$$

$$S_1 = \{s_0, s_1, s_2\}$$

$$L(N_{bba}) = \{w \in V^* \mid$$

$bba$  ist kein  
Teilwort  
von  $w\}$

# Nichtdeterministische endliche Automaten

## Definition

Ein nichtdeterministischer endlicher Automat wird durch die folgenden Bestimmungsstücke gegeben:

- ▶ eine endliche Menge  $S$  von Zuständen,
- ▶ ein Alphabet  $V$ ,
- ▶ ein Anfangszustand  $s_0 \in S$ ,
- ▶ eine Übergangsfunktion  $\delta : S \times V \rightarrow Pot(S)$ ,
- ▶ eine Menge  $F \subseteq S$  von Finalzuständen,

Die Änderung gegenüber den deterministischen endlichen Automaten besteht also darin, daß die Übergangsfunktion  $\delta$  als Werte Mengen von Zuständen annimmt:

# Nichtdeterministisch akzeptierte Sprachen

Die Fortsetzung von  $\delta : S \times V \rightarrow Pot(S)$  zu  $\delta : S \times V^* \rightarrow Pot(S)$  wird jetzt wie folgt definiert:

$$\delta(s, \varepsilon) = \{s\}$$

$$\delta(s, aw_1) = \{s' \mid \text{es gibt } s_1 \in S \text{ mit } s_1 \in \delta(s, a) \text{ und } s' \in \delta(s_1, w_1)\}$$

Die von einem nichtdeterministischen endlichen Automaten *NEA* akzeptierte Sprache  $L(NEA)$  wird jetzt durch

$$L(NEA) = \{w \in V^* \mid \delta(s_0, w) \cap F \neq \emptyset\}$$

definiert.



## Definition

Ein endlicher Automat mit spontanen Übergängen wird durch die folgenden Bestimmungsstücke gegeben:

- ▶ eine endliche Menge  $S$  von Zuständen,
- ▶ ein Alphabet  $V$ ,
- ▶ ein Anfangszustand  $s_0 \in S$ ,
- ▶ eine Menge  $F \subseteq S$  von Finalzuständen,
- ▶ eine Übergangsfunktion  $\delta : S \times (V \cup \{\varepsilon\}) \rightarrow Pot(S)$

Sei  $A = (S, V, s_0, \delta, F)$  ein endlicher Automat mit spontanen Übergängen, dann ist die Funktion

$$\varepsilon\text{-cl} : \text{Pot}(S) \rightarrow \text{Pot}(S)$$

für  $I \subseteq S$  definiert als:

$\varepsilon\text{-cl}(I)$  ist die kleinste Teilmenge  $J \subseteq S$  mit

1.  $I \subseteq J$
2. für alle  $s \in J$  gilt  $\delta(s, \varepsilon) \subseteq J$ .

Die Bezeichnung  $\varepsilon$ -cl soll an  $\varepsilon$ -closure erinnern.

Die Fortsetzung von  $\delta : S \times (V \cup \{\varepsilon\}) \rightarrow Pot(S)$  zu  $\bar{\delta} : S \times V^* \rightarrow Pot(S)$  kann jetzt definiert werden als:

$$\bar{\delta}(s, \varepsilon) = \varepsilon-cl(\{s\})$$

$$\bar{\delta}(s, aw_1) = \{s' \mid \text{es gibt } s_1, s_2 \text{ mit } s_1 \in \varepsilon-cl(\{s\}), s_2 \in \delta(s_1, a), s' \in \bar{\delta}(s_2, w_1)\}$$

Die von einem nichtdeterministischen endlichen Automaten *NEA* mit spontanen Übergängen akzeptierte Sprache  $L(NEA)$  wird wieder durch

$$L(NEA) = \{w \in V^* \mid \bar{\delta}(s_0, w) \cap F \neq \emptyset\}$$

definiert.

## Satz

Zu jedem nichtdeterministischen endlichen Automaten

$$A = (S, V, s_0, \delta, F)$$

gibt es einen deterministischen endlichen Automaten

$$B = (Q, V, q_0, \Delta, G)$$

mit

$$L(A) = L(B)$$

Dabei kann  $A$  spontane Übergänge enthalten und muß auch nicht vollständig sein.

## Liste der Operationen

Seien  $L, L_1, L_2 \subseteq V^*$ .

1.  $L_1 L_2 = \{w_1 w_2 \mid w_1 \in L_1, w_2 \in L_2\}$ ,
2.  $L^* = \{w_1 \dots w_n \mid n \geq 0, w_i \in L\}$
3.  $L_1 \cup L_2 =$  Mengenvereinigung
4.  $L_1 \cap L_2 =$  Mengendurchschnitt
5.  $L_1 \setminus L_2 =$  Mengendifferenz

$Reg_V$  = Menge der regulären Ausdrücke über  $V$

1.  $\emptyset \in Reg_V$ ,
2.  $\varepsilon \in Reg_V$ ,
3. für jedes  $a \in V$  ist  $a \in Reg_V$ ,
4. für  $t \in Reg_V$  gilt auch  $(t)^* \in Reg_V$ ,
5. für  $t_1, t_2 \in Reg_V$  gilt auch  $(t_1 t_2) \in Reg_V$  und  $(t_1 + t_2) \in Reg_V$ .

Durch die folgende Vorschrift wird jedem regulären Ausdruck  $t$  über  $V$  eine Menge  $S(t)$  von Wörtern in  $V^*$  zugeordnet.

1.  $S(\emptyset) = \emptyset$ ,
2.  $S(\varepsilon) = \{\varepsilon\}$ ,
3.  $S(a) = \{a\}$ ,
4.  $S((t)^*) = (S(t))^*$ ,
5.  $S((t_1 t_2)) = S(t_1)S(t_2)$  und  $S((t_1 + t_2)) = S(t_1) \cup S(t_2)$ .

## Satz

Zu jedem endlichen Automaten  $A$  gibt es einen regulären Ausdruck  $t$  mit

$$S(t) = L(A).$$

Wir benutzen im folgenden stillschweigend die Assoziativität der Konkatenation und von  $+$  um in regulären Ausdrücken Klammern einzusparen, also  $(a + b + c)$  anstelle von  $((a + b) + c)$ .