

Formale Systeme

Prof. Dr. Bernhard Beckert, WS 2016/2017

Büchi-Automaten

KIT – INSTITUT FÜR THEORETISCHE INFORMATIK

Büchi-Automaten

Einführung

Unendliche Wörter

Definition

Sei V ein (weiterhin endliches) Alphabet.

$$V^\omega$$

ist die Menge der unendlichen Wörter mit Buchstaben aus V .

$$w(n)$$

bezeichnet den n -ten Buchstaben in w und

$$w \downarrow (n)$$

das endliche Anfangstück $w(0) \dots w(n)$ von w .

Ein Wort $w \in V^\omega$ heißt auch ω -Wort über V .

Man kann ein unendliches Wort $w \in V^\omega$ auch als eine Funktion $w : \mathbb{N} \rightarrow V$, von den natürlichen Zahlen in das Alphabet auffassen.

Das leere Wort ε kommt **nicht** in V^ω vor.

Operationen

auf unendlichen Wörtern

Sei $K \subseteq V^*$ und $J \subseteq V^\omega$:

1. K^ω bezeichnet die Menge der unendlichen Wörter der Form

$$w_1 \dots w_i \dots \text{ mit } w_i \in K \text{ für alle } i$$

- 2.

$$KJ = \{w_1 w_2 \mid w_1 \in K, w_2 \in J\}$$

- 3.

$$\vec{K} = \{w \in V^\omega \mid w \downarrow (n) \in K \text{ für unendlich viele } n\}$$

Manche Autoren benutzen $\lim(K)$ anstelle von $\vec{K}$.

Büchi-Automaten

Definition

Sei $\mathcal{A} = (S, V, s_0, \delta, F)$ ein nicht deterministischer endlicher Automat.

Für ein ω -Wort $w \in V^\omega$ nennen wir eine Folge $s_0, \dots, s_n, \dots$ eine *Berechnungsfolge* (Englisch *run*) für w , wenn für alle $0 \leq n$:

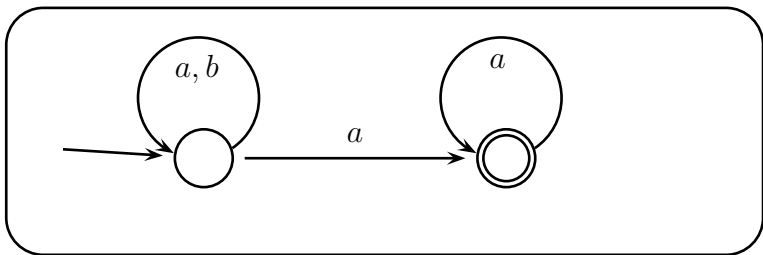
$$s_{n+1} \in \delta(s_n, w(n))$$

Die von $\mathcal{A}$ akzeptierte ω -Sprache ist:

$$L^\omega(\mathcal{A}) = \{w \in V^\omega \mid \text{es gibt eine Berechnungsfolge für } w \text{ mit unendlich vielen Finalzuständen} \}$$

Der einzige Unterschied zwischen Büchi-Automaten und (normalen) endlichen Automaten liegt in der Akzeptanzdefinition.

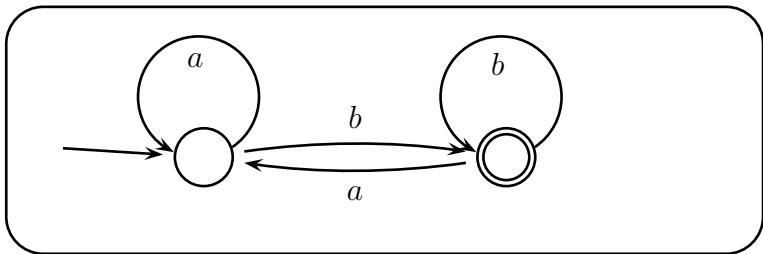
Beispiel 1



Die akzeptierte Sprache ist

$$\{a, b\}^* a^\omega$$

Beispiel 2



Die akzeptierte Sprache ist

$$(a^*b)^\omega$$
$$\{w \in \{a, b\}^\omega \mid b \text{ kommt unendlich oft vor in } w\}$$

Die Frage, ob für einen Büchi-Automaten $\mathcal{B}$ die Menge der akzeptierten Wörter nicht leer ist, d.h.

$$L^\omega(\mathcal{B}) \neq \emptyset,$$

ist entscheidbar.

Beweis:

Um $L^\omega(\mathcal{B}) \neq \emptyset$ zu zeigen muß man nur einen erreichbaren Endzustand $q_f \in F$ finden, der auf einer Schleife liegt.

Wir nennen eine Menge L von ω -Wörtern **ω -regulär**, wenn es einen Büchi-Automaten $\mathcal{A}$ gibt mit $L^\omega(\mathcal{A}) = L$.

Lemma

Sei $\mathcal{A}$ ein endlicher Automat und $K = L(\mathcal{A})$. Dann gilt

1. $L^\omega(\mathcal{A}) \subseteq \vec{K}$
2. Falls $\mathcal{A}$ deterministisch ist gilt sogar $L^\omega(\mathcal{A}) = \vec{K}$

Beweis zu 1:

Für $w \in L^\omega(\mathcal{A})$ gibt es eine Berechnungsfolge

$\rho_w = s_0, s_1 \dots s_n \dots$, so daß $F_w = \{n \in \mathbb{N} \mid s_n \in F\}$ unendlich ist.

Für alle $n \in F_w$ gilt $s_n \in F$

$\Rightarrow w \downarrow (n) \in K$.

Also $w \in \vec{K}$.

Lemma

Sei $\mathcal{A}$ ein endlicher Automat und $K = L(\mathcal{A})$. Dann gilt

1. $L^\omega(\mathcal{A}) \subseteq \vec{K}$
2. Falls $\mathcal{A}$ deterministisch ist gilt sogar $L^\omega(\mathcal{A}) = \vec{K}$

Beweis zu 2:

Für $w \in \vec{K}$ ist $R_w = \{n \in \mathbb{N} \mid w \downarrow (n) \in K\}$ unendlich.

Für jedes $n \in R_w$ gibt es eine Berechnungsfolge

$s_n = s_{n,1}, s_{n,2}, \dots, s_{n,n}$ für $w \downarrow (n)$.

Da $\mathcal{A}$ deterministisch ist, ist für jedes Paar $n, m \in R_w$ mit $n < m$ s_n Anfangsstück von s_m .

Zusammengesetzt erhalten wir eine unendliche Berechnungsfolge s für w , die unendlich oft einen Endzustand durchläuft.

Also $w \in L^\omega(\mathcal{A})$.

Deterministische Büchi-Automaten

und ihre regulären Mengen

Korollar

Für eine ω -Sprache $L \subseteq V^\omega$ sind äquivalent:

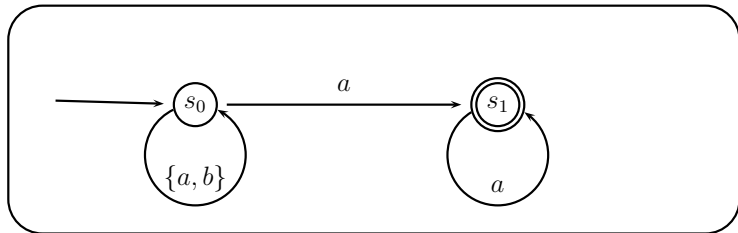
- ▶ $L = L^\omega(\mathcal{A})$ für einen deterministischen Büchi-Automaten
- ▶ es eine reguläre Sprache $K \subseteq V^*$ gibt mit $L = \vec{K}$.

Beweis:

Folgt direkt aus der Tatsache, daß für deterministische Automaten $\mathcal{A}$

$$L^\omega(\mathcal{A}) = \vec{L(\mathcal{A})}$$

gilt (vorangegangenes Lemma).



$L^\omega(N_{bfin}) = \{w \in \{a, b\}^\omega \mid \text{in } w \text{ kommt } b \text{ nur endlich oft vor}\}$

$L(N_{bfin}) = \{w \in \{a, b\}^* \mid w \text{ endet auf } a\}.$

$\text{Lim}(L(N_{bfin})) = \{w \in \{a, b\}^\omega \mid \text{in } w \text{ kommt } a \text{ unendlich oft vor}\}.$

Man sieht leicht, daß $L^\omega(N_{bfin}) \neq \text{Lim}(L(N_{bfin}))$

Korollar

Es gibt Sprachen $L \subseteq V^\omega$, die von einem nicht-deterministischen Büchi-Automaten akzeptiert werden, aber von keinem deterministischen.

Beweis:

Wir wählen $V = \{a, b\}$ und

$$L = L^\omega(N_{bfin}) = \{w \in V^\omega \mid w(n) = b \text{ nur für endlich viele } n\}$$

Angenommen $L = \vec{K}$ für eine reguläre Menge $K \subseteq V^*$.

Es gibt ein $k_1 > 0$ mit $a^{k_1} \in K$, da $a^\omega \in L$.

Dann gibt es auch ein $k_2 > 0$ mit $a^{k_1}ba^{k_2} \in K$, weil $a^{k_1}ba^\omega \in L$.

So fortfahrend gibt es $k_i > 0$ für alle i mit $a^{k_1}ba^{k_2}b \dots ba^{k_i} \in K$.

Wegen $L = \vec{K}$ folgt daraus auch $a^{k_1}ba^{k_2}b \dots ba^{k_i}b \dots \in L$

im Widerspruch zur Definition von L .

Sind L_1, L_2 ω -reguläre Sprachen und ist K eine reguläre Sprache, dann ist auch

1. $L_1 \cup L_2$ ω -regulär,
2. K^ω ω -regulär, falls $\varepsilon \notin K$,
3. KL_1 ω -regulär,
4. $V^\omega \setminus L_1$ ω -regulär,
5. $L_1 \cap L_2$ ω -regulär.

Beweis

Abschlossenheit unter $\cup$

Seien $\mathcal{A}_i = (Q_i, V, s_0^i, \delta_i, F_i)$ für $i = 1, 2$ Büchi-Automaten und $L_i = L_i^\omega(\mathcal{A}_i)$.

Wir können ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß $Q_1 \cap Q_2 = \emptyset$

Wir konstruieren einen Büchi-Automaten $\mathcal{A} = (Q, V, s_0, \delta, F)$, wobei s_0 ein neuer Zustand ist, der weder in Q_1 noch in Q_2 vorkommt.

$$\begin{aligned}
 Q &= Q_1 \cup Q_2 \cup \{s_0\} \\
 \delta(q, a) &= \delta_i(q, a) && \text{falls } q \in Q_i \\
 \delta(s_0, a) &= \delta_1(s_0^1, a) \cup \delta_2(s_0^2, a) \\
 F &= F_1 \cup F_2
 \end{aligned}$$

Man zeigt leicht, daß $L^\omega(\mathcal{A}) = L_1 \cup L_2$.

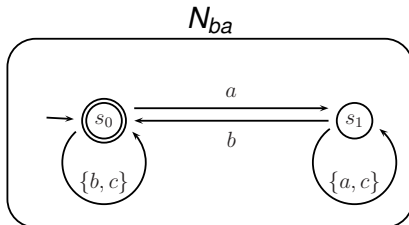
Der Automaten $\mathcal{B} = (Q_B, V, s_0^B, \delta_B, F_B)$ sei definiert durch:

$$\begin{aligned} Q_B &= Q_A \\ s_0^B &= s_0^A \\ \delta_B(q, a) &= \delta_A(q, a) \quad \text{falls } q \in Q_B \\ \delta_B(q, \epsilon) &= \{s_0^B\} \quad \text{falls } q \in F_A \\ F_B &= \{s_0^B\} \end{aligned}$$

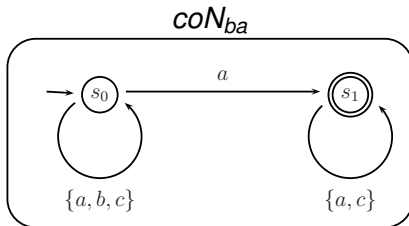
Wir können annehmen, daß für alle $q \in F_A$ und alle $x \in \Sigma$ gilt:

$$s_0^A \notin \delta_A(q, x).$$

Beispiel zur Komplementbildung



$$L^\omega(N_{ba}) = \{w \in \{a, b, c\}^\omega \mid \text{nach jedem } a \text{ kommt ein } b\}$$



Die Abgeschlossenheit
 ω -regulärer Mengen
unter Komplementbildung
muss noch bewiesen werden.

(siehe Skriptum)

Satz

$L \subseteq V^\omega$ ist ω -regulär, genau dann, wenn L eine endliche Vereinigung von Mengen der Form

$$JK^\omega$$

für reguläre Mengen $J, K \subseteq V^*$ ist, wobei $\varepsilon \notin K$.