

Formale Systeme

Prof. Dr. Bernhard Beckert, WS 2016/2017

Lineare Temporale Logik

KIT – INSTITUT FÜR THEORETISCHE INFORMATIK

Definition

Eine **omega-Struktur** $\mathcal{R} = (\mathbb{N}, <, \xi)$ für eine aussagenlogische Signatur P besteht aus der geordneten Menge der natürlichen Zahlen

$$(\mathbb{N}, <)$$

interpretiert als Menge abstrakter Zeitpunkte und einer Funktion

$$\xi : \mathbb{N} \rightarrow 2^P$$

mit der Intention

$$p \in \xi(n) \Leftrightarrow \text{in } \mathcal{R} \text{ ist } p \text{ zum Zeitpunkt } n \text{ wahr}$$

Omega-Strukturen

Definition

Eine **omega-Struktur** $\mathcal{R} = (\mathbb{N}, <, \xi)$ für eine aussagenlogische Signatur P besteht aus der geordneten Menge der natürlichen Zahlen

$$(\mathbb{N}, <)$$

interpretiert als Menge abstrakter Zeitpunkte und einer Funktion

$$\xi : \mathbb{N} \rightarrow 2^P$$

mit der Intention

$$p \in \xi(n) \Leftrightarrow \text{in } \mathcal{R} \text{ ist } p \text{ zum Zeitpunkt } n \text{ wahr}$$

ξ_n steht für das bei n beginnende Endstück von ξ :

$$\xi_n(m) = \xi(n + m) \quad \text{insbes. } \xi_0 = \xi$$

Definition

Σ eine Menge aller AL-Atome. *LTLFor* wird definiert durch

1. $\Sigma \subseteq \textit{LTLFor}$

Definition

Σ eine Menge aller AL-Atome. *LTLFor* wird definiert durch

1. $\Sigma \subseteq \textit{LTLFor}$
2. $\mathbf{1}, \mathbf{0} \in \textit{LTLFor}$

Definition

Σ eine Menge aller AL-Atome. *LTLFor* wird definiert durch

1. $\Sigma \subseteq \textit{LTLFor}$
2. $\mathbf{1}, \mathbf{0} \in \textit{LTLFor}$
3. Liegen A, B in *LTLFor*, dann auch alle aussagenlogischen Kombinationen von A und B .

Definition

Σ eine Menge aller AL-Atome. *LTLFor* wird definiert durch

1. $\Sigma \subseteq LTLFor$
2. $\mathbf{1}, \mathbf{0} \in LTLFor$
3. Liegen A, B in *LTLFor*, dann auch alle aussagenlogischen Kombinationen von A und B .
4. für $A, B \in LTLFor$ gilt auch

Definition

Σ eine Menge aller AL-Atome. *LTLFor* wird definiert durch

1. $\Sigma \subseteq LTLFor$
2. $\mathbf{1}, \mathbf{0} \in LTLFor$
3. Liegen A, B in *LTLFor*, dann auch alle aussagenlogischen Kombinationen von A und B .
4. für $A, B \in LTLFor$ gilt auch
 - 4.1 $\Box A \in LTLFor$ und

Definition

Σ eine Menge aller AL-Atome. *LTLFor* wird definiert durch

1. $\Sigma \subseteq LTLFor$
2. $\mathbf{1}, \mathbf{0} \in LTLFor$
3. Liegen A, B in *LTLFor*, dann auch alle aussagenlogischen Kombinationen von A und B .
4. für $A, B \in LTLFor$ gilt auch
 - 4.1 $\Box A \in LTLFor$ und
 - 4.2 $\Diamond B \in LTLFor$ und

Definition

Σ eine Menge aller AL-Atome. *LTLFor* wird definiert durch

1. $\Sigma \subseteq LTLFor$
2. $\mathbf{1}, \mathbf{0} \in LTLFor$
3. Liegen A, B in *LTLFor*, dann auch alle aussagenlogischen Kombinationen von A und B .
4. für $A, B \in LTLFor$ gilt auch
 - 4.1 $\Box A \in LTLFor$ und
 - 4.2 $\Diamond B \in LTLFor$ und
 - 4.3 $A \mathbf{U} B \in LTLFor$

Definition

Σ eine Menge aller AL-Atome. *LTLFor* wird definiert durch

1. $\Sigma \subseteq LTLFor$
2. $\mathbf{1}, \mathbf{0} \in LTLFor$
3. Liegen A, B in *LTLFor*, dann auch alle aussagenlogischen Kombinationen von A und B .
4. für $A, B \in LTLFor$ gilt auch
 - 4.1 $\Box A \in LTLFor$ und
 - 4.2 $\Diamond B \in LTLFor$ und
 - 4.3 $A \mathbf{U} B \in LTLFor$
 - 4.4 $X A$

Definition

Σ eine Menge aller AL-Atome. *LTLFor* wird definiert durch

1. $\Sigma \subseteq LTLFor$
2. $\mathbf{1}, \mathbf{0} \in LTLFor$
3. Liegen A, B in *LTLFor*, dann auch alle aussagenlogischen Kombinationen von A und B .
4. für $A, B \in LTLFor$ gilt auch
 - 4.1 $\Box A \in LTLFor$ und
 - 4.2 $\Diamond B \in LTLFor$ und
 - 4.3 $A \mathbf{U} B \in LTLFor$
 - 4.4 $X A$

Definition

Σ eine Menge aller AL-Atome. *LTLFor* wird definiert durch

1. $\Sigma \subseteq LTLFor$
2. $\mathbf{1}, \mathbf{0} \in LTLFor$
3. Liegen A, B in *LTLFor*, dann auch alle aussagenlogischen Kombinationen von A und B .
4. für $A, B \in LTLFor$ gilt auch
 - 4.1 $\Box A \in LTLFor$ und
 - 4.2 $\Diamond B \in LTLFor$ und
 - 4.3 $A \mathbf{U} B \in LTLFor$
 - 4.4 $X A$

Die Symbole $\Box$, $\Diamond$, X und $\mathbf{U}$ heißen temporale Modaloperatoren.

Definition

Sei $\mathcal{R} = (\mathbb{N}, <, \xi)$ eine omega-Struktur und A eine *LTL* Formel.

Definition

Sei $\mathcal{R} = (\mathbb{N}, <, \xi)$ eine omega-Struktur und A eine *LTL* Formel.

$$\xi \models p \quad \text{gdw} \quad p \in \xi(0) \quad (p \text{ ein AL Atom})$$

Definition

Sei $\mathcal{R} = (\mathbb{N}, <, \xi)$ eine omega-Struktur und A eine *LTL* Formel.

$\xi \models p$ gdw $p \in \xi(0)$ (p ein AL Atom)

$\xi \models op(A, B)$ für AL-Kombinationen $op(A, B)$
von A und B wie üblich

Definition

Sei $\mathcal{R} = (\mathbb{N}, <, \xi)$ eine omega-Struktur und A eine *LTL* Formel.

$\xi \models p$ gdw $p \in \xi(0)$ (p ein AL Atom)

$\xi \models op(A, B)$ für AL-Kombinationen $op(A, B)$
von A und B wie üblich

$\xi \models \Box A$ gdw für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $\xi_n \models A$

Definition

Sei $\mathcal{R} = (\mathbb{N}, <, \xi)$ eine omega-Struktur und A eine *LTL* Formel.

$\xi \models p$ gdw $p \in \xi(0)$ (p ein AL Atom)

$\xi \models op(A, B)$ für AL-Kombinationen $op(A, B)$
von A und B wie üblich

$\xi \models \Box A$ gdw für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $\xi_n \models A$

$\xi \models \Diamond A$ gdw es gibt ein $n \in \mathbb{N}$ mit $\xi_n \models A$

Definition

Sei $\mathcal{R} = (\mathbb{N}, <, \xi)$ eine omega-Struktur und A eine *LTL* Formel.

$\xi \models p$ gdw $p \in \xi(0)$ (p ein AL Atom)

$\xi \models op(A, B)$ für AL-Kombinationen $op(A, B)$
von A und B wie üblich

$\xi \models \Box A$ gdw für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $\xi_n \models A$

$\xi \models \Diamond A$ gdw es gibt ein $n \in \mathbb{N}$ mit $\xi_n \models A$

$\xi \models A \mathbf{U} B$ gdw es gibt $n \in \mathbb{N}$ mit $\xi_n \models B$ und
für alle m mit $0 \leq m < n$ gilt $\xi_m \models A$

Definition

Sei $\mathcal{R} = (\mathbb{N}, <, \xi)$ eine omega-Struktur und A eine *LTl* Formel.

$\xi \models p$ gdw $p \in \xi(0)$ (p ein AL Atom)

$\xi \models op(A, B)$ für AL-Kombinationen $op(A, B)$
von A und B wie üblich

$\xi \models \Box A$ gdw für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $\xi_n \models A$

$\xi \models \Diamond A$ gdw es gibt ein $n \in \mathbb{N}$ mit $\xi_n \models A$

$\xi \models A \mathbf{U} B$ gdw es gibt $n \in \mathbb{N}$ mit $\xi_n \models B$ und
für alle m mit $0 \leq m < n$ gilt $\xi_m \models A$

$\xi \models X A$ gdw $\xi_1 \models A$

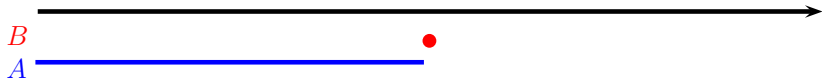
Szenarium für $\Box A$



Szenarium für $\Diamond A$



Szenarium für $A \cup B$



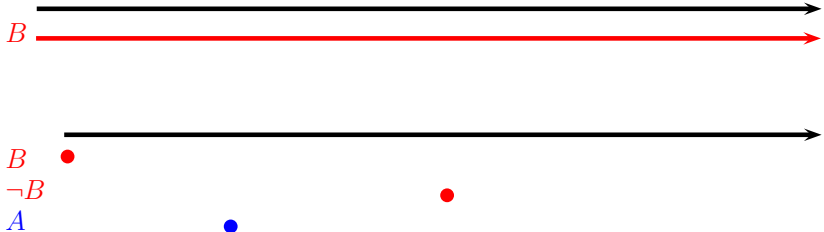
Reduktion auf $\mathbf{U}$ und $\mathbf{1}$

$$\begin{aligned}\Diamond A &\leftrightarrow \mathbf{1} \mathbf{U} A \\ \Box A &\leftrightarrow \neg(\mathbf{1} \mathbf{U} \neg A)\end{aligned}$$

$\xi \models A \mathbf{U}_w B$ gdw für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $\xi_n \models (A \wedge \neg B)$ oder
es gibt $n \in \mathbb{N}$ mit $\xi_n \models B$ und
für alle m mit $0 \leq m < n$ gilt $\xi_m \models A$

$\xi \models A \mathbf{V} B$ gdw $\xi \models B$ und für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt
falls $\xi_n \models \neg B$ dann gibt es ein m mit
 $0 \leq m < n$ und $\xi_m \models A$

Szenarien für $A \vee B$



$$1. A \mathbf{U} B \leftrightarrow (A \mathbf{U}_w B) \wedge \Diamond B$$

1. $A \mathbf{U} B \leftrightarrow (A \mathbf{U}_w B) \wedge \Diamond B$
2. $A \mathbf{U}_w B \leftrightarrow A \mathbf{U} B \vee \Box(A \wedge \neg B)$

1. $A \mathbf{U} B \leftrightarrow (A \mathbf{U}_w B) \wedge \Diamond B$
2. $A \mathbf{U}_w B \leftrightarrow A \mathbf{U} B \vee \Box(A \wedge \neg B)$
3. $A \mathbf{V} B \leftrightarrow \neg(\neg A \mathbf{U} \neg B)$

1. $A \mathbf{U} B \leftrightarrow (A \mathbf{U}_w B) \wedge \Diamond B$
2. $A \mathbf{U}_w B \leftrightarrow A \mathbf{U} B \vee \Box(A \wedge \neg B)$
3. $A \mathbf{V} B \leftrightarrow \neg(\neg A \mathbf{U} \neg B)$
4. $A \mathbf{U} B \leftrightarrow (B \vee (A \wedge X(A \mathbf{U} B)))$

1. $A \mathbf{U} B \leftrightarrow (A \mathbf{U}_w B) \wedge \Diamond B$
2. $A \mathbf{U}_w B \leftrightarrow A \mathbf{U} B \vee \Box(A \wedge \neg B)$
3. $A \mathbf{V} B \leftrightarrow \neg(\neg A \mathbf{U} \neg B)$
4. $A \mathbf{U} B \leftrightarrow (B \vee (A \wedge X(A \mathbf{U} B)))$
5. $A \mathbf{V} B \leftrightarrow (B \wedge A) \vee (B \wedge X(A \mathbf{V} B))$

Sei p ein aussagenlogisches Atom.

Gesucht ist eine LTL-Formel A_{2p} , so daß für jedes ξ gilt

$$\xi \models A_{2p} \quad \text{gdw} \quad (n \text{ ist gerade} \Leftrightarrow p \in \xi(n))$$

Sei p ein aussagenlogisches Atom.

Gesucht ist eine LTL-Formel A_{2p} , so daß für jedes ξ gilt

$$\xi \models A_{2p} \quad \text{gdw} \quad (n \text{ ist gerade} \Leftrightarrow p \in \xi(n))$$

$$A_{2p} = p \wedge X \neg p \wedge \Box(p \leftrightarrow XX p)$$

Sei p ein aussagenlogisches Atom.

Gesucht ist eine LTL-Formel A_{2p} , so daß für jedes ξ gilt

$$\xi \models A_{2p} \quad \text{gdw} \quad (n \text{ ist gerade} \Leftrightarrow p \in \xi(n))$$

$$A_{2p} = p \wedge X \neg p \wedge \Box(p \leftrightarrow XX p)$$

Erstaunlicherweise gibt es keine LTL-Formel A mit

$$\xi \models A \quad \text{gdw} \quad (n \text{ ist gerade} \Rightarrow p \in \xi(n))$$

REQUIREMENT: After OpeningNetworkConnection, an
ErrorMessage will pop up
in response to a NetworkError

PATTERN: Response

SCOPE: After

PARAMETERS: Propositional

LTL: [] (OpenNetworkConnection ->
[] (NetworkError -> <>ErrorMessage))

SOURCE: Jeff Isom \cite{isom:98}

DOMAIN: GUI

REQUIREMENT: Before QueuedMailSent,
SMTPServerConnected

PATTERN: Existence

SCOPE: Before

ALTERNATE: Global Precedence

PARAMETERS: Propositional

LTL: $\langle \rangle \text{QueuedMailSent} \rightarrow$
 $(\neg \text{QueuedMailSent} \cup \text{SMTPServerConnected})$

SOURCE: Jeff Isom \cite{isom:98}

DOMAIN: GUI