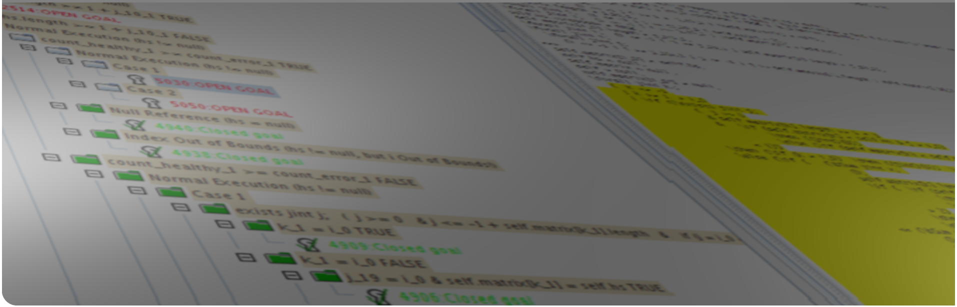
Formale Systeme

Prof. Dr. Bernhard Beckert, WS 2017/2018

Aussagenlogik: Syntax und Semantik

KIT – Institut für Theoretische Informatik



Sudoku

5	3			7				
6			1	9	5			
	9	8					6	
8				6				3
4			8		3			1
7				2				6
	6					2	8	
			4	1	9			5
				8			7	9

Sudoku

5	3			7				
6			1	9	5			
	9	8					6	
8				6				3
4			8		3			1
7				2				6
	6					2	8	
			4	1	9			5
				8			7	9

Vervollständigen Sie das Sudoku so, dass

- in jeder der neun Spalten
- in jeder der neun Reihen
- und in jeder der neun Regionen

alle Zahlen von 1 bis 9 vorkommen.

Sudoku
Lösung

5	3	4	6	7	8	9	1	2
6	7	2	1	9	5	3	4	8
1	9	8	3	4	2	5	6	7
8	5	9	7	6	1	4	2	3
4	2	6	8	5	3	7	9	1
7	1	3	9	2	4	8	5	6
9	6	1	5	3	7	2	8	4
2	8	7	4	1	9	6	3	5
3	4	5	2	8	6	1	7	9

Lösungsweg via Aussagenlogik

Wir führen für jede Zellenposition (i, j) des Sudoku und jede Zahl k zwischen 1 und 9 eine Boolesche Variable

$$D_{i,j}^{k}$$

ein, mit der Vorstellung, dass $D_{i,j}^{k}$ den Wert *wahr* hat, wenn auf dem Feld (i, j) die Zahl k steht.

Lösungsweg via Aussagenlogik

Wir führen für jede Zellenposition (i, j) des Sudoku und jede Zahl k zwischen 1 und 9 eine Boolesche Variable

$$D^k_{i,j}$$

ein, mit der Vorstellung, dass $D^k_{i,j}$ den Wert *wahr* hat, wenn auf dem Feld (i, j) die Zahl k steht.

Wir benutzen kartesische Koordinaten zur Notation von Positionen.

Lösungsweg via Aussagenlogik

Wir führen für jede Zellenposition (i, j) des Sudoku und jede Zahl k zwischen 1 und 9 eine Boolesche Variable

$$D^k_{i,j}$$

ein, mit der Vorstellung, dass $D^k_{i,j}$ den Wert *wahr* hat, wenn auf dem Feld (i, j) die Zahl k steht.

Wir benutzen kartesische Koordinaten zur Notation von Positionen.

So ist z.B. $D^9_{9,1}$ wahr, wenn in der rechten unteren Ecke die Zahl 9 steht.

Sudoku Regeln als AL-Formeln

$$D^1_{1,9} \vee D^1_{2,9} \vee D^1_{3,9} \vee D^1_{4,9} \vee D^1_{5,9} \vee D^1_{6,9} \vee D^1_{7,9} \vee D^1_{8,9} \vee D^1_{9,9}$$

sagt, dass die Ziffer 1 mindestens einmal in der ersten Zeile vorkommen muß.

Sudoku Regeln als AL-Formeln

$$D^1_{1,9} \vee D^1_{2,9} \vee D^1_{3,9} \vee D^1_{4,9} \vee D^1_{5,9} \vee D^1_{6,9} \vee D^1_{7,9} \vee D^1_{8,9} \vee D^1_{9,9}$$

sagt, dass die Ziffer 1 mindestens einmal in der ersten Zeile vorkommen muß.

$$D^1_{1,1} \vee D^1_{1,2} \vee D^1_{1,3} \vee D^1_{1,4} \vee D^1_{1,5} \vee D^1_{1,6} \vee D^1_{1,7} \vee D^1_{1,8} \vee D^1_{1,9}$$

sagt, dass die Ziffer 1 mindestens einmal in der ersten Spalte vorkommen muß.

Sudoku Regeln als AL-Formeln

$$D^1_{1,9} \vee D^1_{2,9} \vee D^1_{3,9} \vee D^1_{4,9} \vee D^1_{5,9} \vee D^1_{6,9} \vee D^1_{7,9} \vee D^1_{8,9} \vee D^1_{9,9}$$

sagt, dass die Ziffer 1 mindestens einmal in der ersten Zeile vorkommen muß.

$$D^1_{1,1} \vee D^1_{1,2} \vee D^1_{1,3} \vee D^1_{1,4} \vee D^1_{1,5} \vee D^1_{1,6} \vee D^1_{1,7} \vee D^1_{1,8} \vee D^1_{1,9}$$

sagt, dass die Ziffer 1 mindestens einmal in der ersten Spalte vorkommen muß.

$$D^1_{1,1} \vee D^1_{1,2} \vee D^1_{1,3} \vee D^1_{2,1} \vee D^1_{2,2} \vee D^1_{2,3} \vee D^1_{3,1} \vee D^1_{3,2} \vee D^1_{3,3}$$

sagt, dass die Ziffer 1 mindestens einmal in der Region links unten vorkommen muss.

Zusätzliche AL-Formeln

Ergibt soweit: $(9 + 9 + 9) * 9 = 243$ Formeln.
Diese Formeln beschreiben Sudoku noch nicht genau.

Zusätzliche AL-Formeln

Ergibt soweit: $(9 + 9 + 9) * 9 = 243$ Formeln.
Diese Formeln beschreiben Sudoku noch nicht genau.

Man muss noch sagen, dass auf jeder Zelle höchstens eine Zahl stehen kann.

Zusätzliche AL-Formeln

Ergibt soweit: $(9 + 9 + 9) * 9 = 243$ Formeln.
Diese Formeln beschreiben Sudoku noch nicht genau.

Man muss noch sagen, dass auf jeder Zelle höchstens eine Zahl stehen kann.

$$\neg(D^1_{1,1} \land D^2_{1,1}),\ \neg(D^1_{1,1} \land D^3_{1,1}),\ \neg(D^1_{1,1} \land D^4_{1,1}),\ \neg(D^1_{1,1} \land D^5_{1,1}),$$
$$\neg(D^1_{1,1} \land D^6_{1,1}),\ \neg(D^1_{1,1} \land D^7_{1,1}),\ \neg(D^1_{1,1} \land D^8_{1,1}),\ \neg(D^1_{1,1} \land D^9_{1,1}),$$

$$\neg(D^2_{1,1} \land D^3_{1,1}),\ \neg(D^2_{1,1} \land D^4_{1,1}),\ \neg(D^2_{1,1} \land D^5_{1,1}),\ \neg(D^2_{1,1} \land D^6_{1,1}),$$
$$\neg(D^2_{1,1} \land D^7_{1,1}),\ \neg(D^2_{1,1} \land D^8_{1,1}),\ \neg(D^2_{1,1} \land D^9_{1,1}),\ \neg(D^3_{1,1} \land D^4_{1,1}),$$

usw.

Zusätzliche AL-Formeln

Allgemein:

$$\neg(D^s_{i,j} \wedge D^t_{i,j})$$

für alle $1 \leq i, j, s, t \leq 9$ mit $s < t$.

Zusätzliche AL-Formeln

Allgemein:

$$\neg(D^s_{i,j} \wedge D^t_{i,j})$$

für alle $1 \leq i, j, s, t \leq 9$ mit $s < t$.

Ergibt insgesamt: $243 + 81 * 36 = 3159$ Formeln.

Zusätzliche AL-Formeln

Allgemein:

$$\neg(D^s_{i,j} \wedge D^t_{i,j})$$

für alle $1 \leq i, j, s, t \leq 9$ mit $s < t$.

Ergibt insgesamt: $243 + 81 * 36 = 3159$ Formeln.

Hinzu kommen atomare Formeln, die das konkrete Rätsel beschreiben:

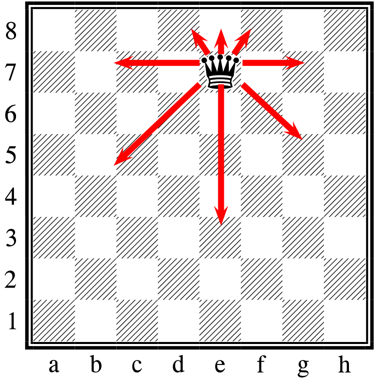
$$D^7_{1,4}, \ldots, D^3_{9,6}$$

Das 8-Damen-Problem

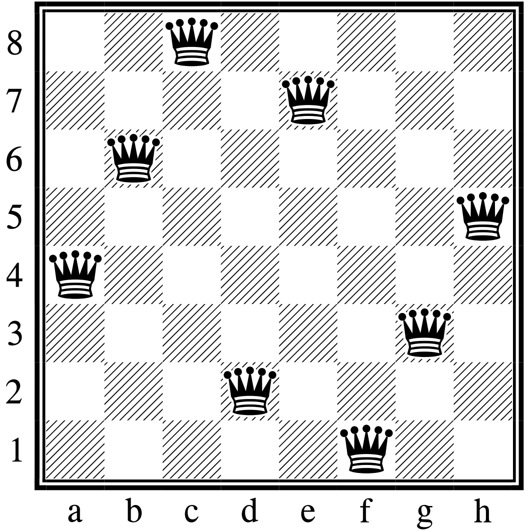
Man plaziere acht Damen so auf einem Schachbrett, dass sie sich gegenseitig nicht bedrohen.

Das 8-Damen-Problem

Man plaziere acht Damen so auf einem Schachbrett, dass sie sich gegenseitig nicht bedrohen.



Eine Lösung des 8-Damen-Problems



Wiederholung

Syntax und Semantik der Aussagenlogik

Vokabular der Aussagenlogik

Logische Zeichen

Vokabular der Aussagenlogik

Logische Zeichen

1 Symbol für den Wahrheitswert „wahr"

Vokabular der Aussagenlogik

Logische Zeichen

1 Symbol für den Wahrheitswert „wahr“

0 Symbol für den Wahrheitswert „falsch“

Vokabular der Aussagenlogik

Logische Zeichen

- **1** Symbol für den Wahrheitswert „wahr“
- **0** Symbol für den Wahrheitswert „falsch“
- $\neg$ Negationssymbol („nicht“)

Vokabular der Aussagenlogik

Logische Zeichen

1 Symbol für den Wahrheitswert „wahr“

0 Symbol für den Wahrheitswert „falsch“

$\neg$ Negationssymbol („nicht“)

$\wedge$ Konjunktionssymbol („und“)

Vokabular der Aussagenlogik

Logische Zeichen

- **1** Symbol für den Wahrheitswert „wahr“
- **0** Symbol für den Wahrheitswert „falsch“
- $\neg$ Negationssymbol („nicht“)
- $\wedge$ Konjunktionssymbol („und“)
- $\vee$ Disjunktionssymbol („oder“)

Vokabular der Aussagenlogik

Logische Zeichen

- **1** Symbol für den Wahrheitswert „wahr“
- **0** Symbol für den Wahrheitswert „falsch“
- $\neg$ Negationssymbol („nicht“)
- $\wedge$ Konjunktionssymbol („und“)
- $\vee$ Disjunktionssymbol („oder“)
- $\rightarrow$ Implikationssymbol („wenn … dann“)

Vokabular der Aussagenlogik

Logische Zeichen

- **1** Symbol für den Wahrheitswert „wahr“
- **0** Symbol für den Wahrheitswert „falsch“
- $\neg$ Negationssymbol („nicht“)
- $\wedge$ Konjunktionssymbol („und“)
- $\vee$ Disjunktionssymbol („oder“)
- $\rightarrow$ Implikationssymbol („wenn … dann“)
- $\leftrightarrow$ Symbol für beiderseitige Implikation („genau dann, wenn“)

Vokabular der Aussagenlogik

Logische Zeichen

- **1** Symbol für den Wahrheitswert „wahr“
- **0** Symbol für den Wahrheitswert „falsch“
- $\neg$ Negationssymbol („nicht“)
- $\wedge$ Konjunktionssymbol („und“)
- $\vee$ Disjunktionssymbol („oder“)
- $\rightarrow$ Implikationssymbol („wenn ... dann“)
- $\leftrightarrow$ Symbol für beiderseitige Implikation („genau dann, wenn“)
- (,) die beiden Klammern

Vokabular der Aussagenlogik

Signatur

Eine (aussagenlogische) *Signatur* ist eine abzählbare Menge Σ von Symbolen, etwa

$$\Sigma = \{P_0, \ldots, P_n\}$$

oder

$$\Sigma = \{P_0, P_1, \ldots\}.$$

Die Elemente von Σ heißen auch *atomare Aussagen*, *Atome* oder *Aussagevariablen*.

Formeln der Aussagenlogik

Zur Signatur Σ ist $For0_\Sigma$, die Menge der

Formeln über Σ

induktiv definiert durch

- $\mathbf{1} \in For0_\Sigma$
  $\mathbf{0} \in For0_\Sigma$
  $\Sigma \subseteq For0_\Sigma$

Formeln der Aussagenlogik

Zur Signatur Σ ist $For0_\Sigma$, die Menge der

Formeln über Σ

induktiv definiert durch

- $\mathbf{1} \in For0_\Sigma$
  $\mathbf{0} \in For0_\Sigma$
  $\Sigma \subseteq For0_\Sigma$
- wenn $A, B \in For0_\Sigma$ dann sind auch

  $\neg A$
  $(A \wedge B)$
  $(A \vee B)$
  $(A \rightarrow B)$
  $(A \leftrightarrow B)$

  Elemente von $For0_\Sigma$

Semantik der Aussagenlogik

Interpretation

Es sei Σ eine aussagenlogische Signatur. Eine Interpretation über Σ ist eine beliebige Abbildung

$$I : \Sigma \to \{W, F\}.$$

Semantik der Aussagenlogik

Auswertung

Zu jedem I über Σ wird eine zugehörige Auswertung der Formeln über Σ definiert

$$val_I : For0_\Sigma \to \{W, F\}$$

mit:

$$\begin{array}{rcll} val_I(\mathbf{1}) & = & W & \\ val_I(\mathbf{0}) & = & F & \\ val_I(P) & = & I(P) & \quad \text{für jedes } P \in \Sigma \end{array}$$

$$val_I(\neg A) = \begin{cases} F & \text{falls} \quad val_I(A) = W \\ W & \text{falls} \quad val_I(A) = F \end{cases}$$

Semantik der Aussagenlogik

Auswertung (Forts.)

val_I auf $(A \wedge B), (A \vee B), (A \rightarrow B), (A \leftrightarrow B)$ wird gemäß der folgenden Tabelle berechnet

$val_I(A)$	$val_I(B)$	$val_I(A \wedge B)$	$val_I(A \vee B)$	$val_I(A \rightarrow B)$	$val_I(A \leftrightarrow B)$
W	W	W	W	W	W
W	F	F	W	F	F
F	W	F	W	W	F
F	F	F	F	W	W

Logische Grundbegriffe

Definition

- Ein Modell einer Formel $A \in For0_\Sigma$ ist eine Interpretation I über Σ mit $val_I(A) = W$.

Logische Grundbegriffe

Definition

- Ein Modell einer Formel $A \in For0_\Sigma$ ist eine Interpretation I über Σ mit $val_I(A) = W$.
- Zu einer Formelmenge $M \subseteq For0_\Sigma$ ist ein Modell von M eine Interpretation I, welche Modell von jedem $A \in M$ ist.

Logische Grundbegriffe

Definition

- Ein Modell einer Formel $A \in For0_\Sigma$ ist eine Interpretation I über Σ mit $val_I(A) = W$.
- Zu einer Formelmenge $M \subseteq For0_\Sigma$ ist ein Modell von M eine Interpretation I, welche Modell von jedem $A \in M$ ist.
- $A \in For0_\Sigma$ heißt allgemeingültig
  gdw
  $val_I(A) = W$ für jede Interpretation I über Σ.

Logische Grundbegriffe

Definition

- Ein Modell einer Formel $A \in For0_\Sigma$ ist eine Interpretation I über Σ mit $val_I(A) = W$.
- Zu einer Formelmenge $M \subseteq For0_\Sigma$ ist ein Modell von M eine Interpretation I, welche Modell von jedem $A \in M$ ist.
- $A \in For0_\Sigma$ heißt allgemeingültig
  gdw
  $val_I(A) = W$ für jede Interpretation I über Σ.
- $A \in For0_\Sigma$ heißt erfüllbar
  gdw
  es gibt eine Interpretation I über Σ mit $val_I(A) = W$.

Logische Grundbegriffe (Forts.)

Definition

Σ sei eine Signatur, $M \subseteq For0_\Sigma$, $A, B \in For0_\Sigma$.

- $M \models A$ lies: aus M folgt A
  gdw
  Jedes Modell von M ist auch Modell von A.

Logische Grundbegriffe (Forts.)

Definition

Σ sei eine Signatur, $M \subseteq For0_\Sigma$, $A, B \in For0_\Sigma$.

- $M \models A$ lies: aus M folgt A
  gdw
  Jedes Modell von M ist auch Modell von A.
- $A, B \in For0_\Sigma$ heißen logisch äquivalent
  gdw
  $\{A\} \models_\Sigma B$ und $\{B\} \models_\Sigma A$

Beispiele allgemeingültiger Formeln

$A \rightarrow A$	Selbstimplikation
$\neg A \vee A$	Tertium non datur
$A \rightarrow (B \rightarrow A)$	Abschwächung
$\mathbf{0} \rightarrow A$	Ex falso quodlibet
$(A \wedge (A \rightarrow B)) \rightarrow B$	Modus Ponens
$A \wedge A \leftrightarrow A$	Idempotenz
$(\neg\neg A) \leftrightarrow A$	Doppelnegation
$A \wedge (A \vee B) \leftrightarrow A$	Absorption
$(A \leftrightarrow B) \leftrightarrow ((A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A))$	Äquivalenz/Implikation
$A \wedge (B \vee C) \leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$	Distributivität
$A \vee (B \wedge C) \leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$	Distributivität

Beispiele allgemeingültiger Formeln (Forts.)

$(A \to B) \leftrightarrow (\neg B \to \neg A)$	Kontraposition
$(A \to (B \to C)) \leftrightarrow$	
$((A \to B) \to (A \to C))$	Verteilen
$\neg(A \vee B) \leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$	De Morgan
$\neg(A \wedge B) \leftrightarrow \neg A \vee \neg B$	De Morgan

Einfache Sätze

Theorem

- *A erfüllbar gdw $\neg$A nicht allgemeingültig*

Einfache Sätze

Theorem

- *A erfüllbar gdw $\neg A$ nicht allgemeingültig*
- $\models A$ *gdw A ist allgemeingültig*

Einfache Sätze

Theorem

- *A erfüllbar* *gdw* $\neg A$ *nicht allgemeingültig*
- $\models A$ *gdw* *A ist allgemeingültig*
- $\models \neg A$ *gdw* *A ist unerfüllbar*

Einfache Sätze

Theorem

- *A erfüllbar gdw $\neg A$ nicht allgemeingültig*
- *$\models A$ gdw A ist allgemeingültig*
- *$\models \neg A$ gdw A ist unerfüllbar*
- *$A \models B$ gdw $\models A \to B$*

Einfache Sätze

Theorem

- *A erfüllbar gdw $\neg A$ nicht allgemeingültig*
- $\models A$ *gdw* *A ist allgemeingültig*
- $\models \neg A$ *gdw* *A ist unerfüllbar*
- $A \models B$ *gdw* $\models A \to B$
- $M \cup \{A\} \models B$ *gdw* $M \models A \to B$

Einfache Sätze

Theorem

- *A erfüllbar* *gdw* $\neg A$ *nicht allgemeingültig*
- $\models A$ *gdw* *A ist allgemeingültig*
- $\models \neg A$ *gdw* *A ist unerfüllbar*
- $A \models B$ *gdw* $\models A \to B$
- $M \cup \{A\} \models B$ *gdw* $M \models A \to B$
- A, B *sind logisch äquivalent* *gdw* $A \leftrightarrow B$ *ist allgemeingültig*

Logische Umformung

Theorem

Wenn

- *A und B logisch äquivalent*
- *A Unterformel von C*
- *C' entsteht aus C dadurch, dass A durch B ersetzt wird*

dann

- *C und C' logisch äquivalent*

Quiz

Welche der folgenden Formeln sind Tautologien?

1 $(A \to B) \to (\neg B \to \neg A)$

Quiz

Welche der folgenden Formeln sind Tautologien?

1 $(A \rightarrow B) \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)$

2 $\neg(A \rightarrow B) \leftrightarrow (A \wedge \neg B)$

Quiz

Welche der folgenden Formeln sind Tautologien?

1	$(A \to B) \to (\neg B \to \neg A)$
2	$\neg(A \to B) \leftrightarrow (A \land \neg B)$
3	$\neg(A \lor B) \to (A \lor B)$

Quiz

Welche der folgenden Formeln sind Tautologien?

1. $(A \to B) \to (\neg B \to \neg A)$
2. $\neg(A \to B) \leftrightarrow (A \land \neg B)$
3. $\neg(A \lor B) \to (A \lor B)$
4. $(A \to B) \to (\neg A \to \neg B)$

Quiz

Welche der folgenden Formeln sind Tautologien?

1. $(A \rightarrow B) \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)$
2. $\neg(A \rightarrow B) \leftrightarrow (A \wedge \neg B)$
3. $\neg(A \vee B) \rightarrow (A \vee B)$
4. $(A \rightarrow B) \rightarrow (\neg A \rightarrow \neg B)$
5. $(\neg A \vee B) \vee (A \wedge \neg B)$

Quiz

Welche der folgenden Formeln sind Tautologien?

1	$(A \to B) \to (\neg B \to \neg A)$	*ja*
2	$\neg(A \to B) \leftrightarrow (A \land \neg B)$	*ja*
3	$\neg(A \lor B) \to (A \lor B)$	*nein*
4	$(A \to B) \to (\neg A \to \neg B)$	*nein*
5	$(\neg A \lor B) \lor (A \land \neg B)$	*ja*

Boolesche Funktionen

Definition

1. Eine Funktion f von $\{\mathbf{W}, \mathbf{F}\}^n$ nach $\{\mathbf{W}, \mathbf{F}\}$ für $n \in \mathbb{N}$ heißt eine n-stellige *Boolesche Funktion*.

Boolesche Funktionen

Definition

1. Eine Funktion f von $\{\mathbf{W}, \mathbf{F}\}^n$ nach $\{\mathbf{W}, \mathbf{F}\}$ für $n \in \mathbb{N}$ heißt eine n-stellige *Boolesche Funktion*.
2. Sei $A \in For0_\Sigma$, $\Sigma = \{P_1, \ldots, P_n\}$ dann wird die *Boolesche Funktion f_A* von A definiert durch:

$$f_A(\bar{b}) = val_I(A)$$

wobei $\bar{b} \in \{\mathbf{W}, \mathbf{F}\}^n$ und $I(P_i) = b_i$.

Boolesche Funktionen

Definition

1. Eine Funktion f von $\{\mathbf{W}, \mathbf{F}\}^n$ nach $\{\mathbf{W}, \mathbf{F}\}$ für $n \in \mathbb{N}$ heißt eine n-stellige *Boolesche Funktion*.
2. Sei $A \in For0_\Sigma$, $\Sigma = \{P_1, \ldots, P_n\}$ dann wird die *Boolesche Funktion f_A* von A definiert durch:

$$f_A(\bar{b}) = val_I(A)$$

wobei $\bar{b} \in \{\mathbf{W}, \mathbf{F}\}^n$ und $I(P_i) = b_i$.

Die Boolesche Funktion f_A hängt ab von der Anordnung der in ihr vorkommenden aussagenlogischen Atome!

Beispiel

Für $A = P_1 \wedge P_3$ in der Signatur $\Sigma = \{P_1, P_2, P_3\}$ ergibt sich f_A aus der folgenden Tabelle:

P_1	P_2	P_3	$f_A(P_1, P_2, P_3)$
W	**W**	**W**	**W**
W	**W**	**F**	**F**
W	**F**	**W**	**W**
W	**F**	**F**	**F**
F	**W**	**W**	**F**
F	**W**	**F**	**F**
F	**F**	**W**	**F**
F	**F**	**F**	**F**

Funktionale Vollständigkeit

Wiederholung

Satz

Zu jeder Booleschen Funktion $f : \{\mathbf{W}, \mathbf{F}\}^n \to \{\mathbf{W}, \mathbf{F}\}$ gibt es eine Formel $A \in For0_\Sigma$ mit

$$f = f_A$$

Funktionale Vollständigkeit

Wiederholung

Satz

Zu jeder Booleschen Funktion $f : \{\mathbf{W}, \mathbf{F}\}^n \to \{\mathbf{W}, \mathbf{F}\}$ gibt es eine Formel $A \in For0_\Sigma$ mit

$$f = f_A$$

Beweis:

Funktionale Vollständigkeit

Wiederholung

Satz

Zu jeder Booleschen Funktion $f : \{\mathbf{W}, \mathbf{F}\}^n \rightarrow \{\mathbf{W}, \mathbf{F}\}$ gibt es eine Formel $A \in For0_\Sigma$ mit

$$f = f_A$$

Beweis: Seien $\bar{b}_1, \ldots \bar{b}_k$ genau die n-Tupel aus $\{\mathbf{W}, \mathbf{F}\}^n$ mit $f(\bar{b}_i) = \mathbf{W}$.

Funktionale Vollständigkeit

Wiederholung

Satz

Zu jeder Booleschen Funktion $f : \{\mathbf{W}, \mathbf{F}\}^n \rightarrow \{\mathbf{W}, \mathbf{F}\}$ gibt es eine Formel $A \in For0_\Sigma$ mit

$$f = f_A$$

Beweis: Seien $\bar{b}_1, \ldots \bar{b}_k$ genau die n-Tupel aus $\{\mathbf{W}, \mathbf{F}\}^n$ mit $f(\bar{b}_i) = \mathbf{W}$.
$A = A_1 \vee \ldots \vee A_k$,

Funktionale Vollständigkeit

Wiederholung

Satz

Zu jeder Booleschen Funktion $f : \{\mathbf{W}, \mathbf{F}\}^n \to \{\mathbf{W}, \mathbf{F}\}$ gibt es eine Formel $A \in For0_\Sigma$ mit

$$f = f_A$$

Beweis: Seien $\bar{b}_1, \ldots \bar{b}_k$ genau die n-Tupel aus $\{\mathbf{W}, \mathbf{F}\}^n$ mit $f(\bar{b}_i) = \mathbf{W}$.
$A = A_1 \vee \ldots \vee A_k$, $A_i = A_{i,1} \wedge \ldots \wedge A_{i,n}$ mit

Funktionale Vollständigkeit

Wiederholung

Satz

Zu jeder Booleschen Funktion $f : \{\mathbf{W}, \mathbf{F}\}^n \to \{\mathbf{W}, \mathbf{F}\}$ gibt es eine Formel $A \in For0_\Sigma$ mit

$$f = f_A$$

Beweis: Seien $\bar{b}_1, \ldots \bar{b}_k$ genau die n-Tupel aus $\{\mathbf{W}, \mathbf{F}\}^n$ mit $f(\bar{b}_i) = \mathbf{W}$.
$A = A_1 \vee \ldots \vee A_k$, $A_i = A_{i,1} \wedge \ldots \wedge A_{i,n}$ mit

$$A_{i,j} = \begin{cases} P_j & \text{falls } b_{i,j} = \mathbf{W} \\ \neg P_j & \text{falls } b_{i,j} = \mathbf{F} \end{cases}$$

Basen

Definition

Eine Menge *KOp* von aussagenlogischen Konstanten und Operatoren heißt eine

Basis,

wenn für jede Boolesche Funktion $f : \{\mathbf{W}, \mathbf{F}\}^n \rightarrow \{\mathbf{W}, \mathbf{F}\}$ eine Formel A existiert, die nur mit Konstanten und Operatoren aus *KOp* aufgebaut ist, mit

$$f_A = f.$$

Basen

Definition

Eine Menge *KOp* von aussagenlogischen Konstanten und Operatoren heißt eine

Basis,

wenn für jede Boolesche Funktion $f : \{\mathbf{W}, \mathbf{F}\}^n \to \{\mathbf{W}, \mathbf{F}\}$ eine Formel A existiert, die nur mit Konstanten und Operatoren aus *KOp* aufgebaut ist, mit

$$f_A = f.$$

Keine Minimalität für *KOp* gefordert.

Basen

Beispiele

- $\{\mathbf{1}, \mathbf{0}, \neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$
- $\{\neg, \wedge\}$
- $\{\mathbf{0}, \rightarrow\}$
- $\{\downarrow\}$
- $\{\mathbf{1}, \mathbf{0}, sh\}$

wobei $A \downarrow B = \neg(A \vee B)$:

$val_I(A)$	$val_I(B)$	$val_I(A \downarrow B)$
W	**W**	**F**
W	**F**	**F**
F	**W**	**F**
F	**F**	**W**