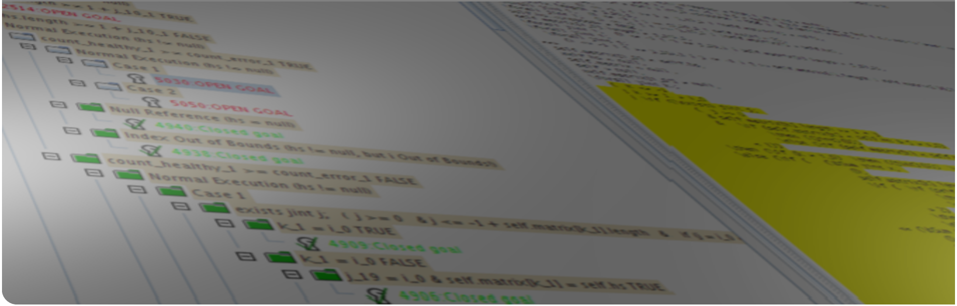
Karlsruhe Institute of Technology

Formale Systeme

Prof. Dr. Bernhard Beckert, WS 2017/2018

Aussagenlogik: Normalformen

KIT – INSTITUT FÜR THEORETISCHE INFORMATIK



Disjunktive und Konjunktive Normalform

Definition

- Ein Literal ist ein Atom oder ein negiertes Atom
- Eine Formel ist in disjunktiver Normalform (DNF), wenn sie Disjunktion von Konjunktionen von Literalen ist.
- Eine Formel ist in konjunktiver Normalform (KNF), wenn sie Konjunktion von Disjunktionen von Literalen ist.

Fakten

1. Zu jeder aussagenlogischen Formel *A* gibt es eine logisch äquivalente in disjunktiver Normalform und ebenso eine logisch äquivalente in konjunktiver Normalform.
2. Die Algorithmen zur Herstellung beider Normalformen ergeben sich unmittelbar aus elementaren Tautologien.
3. Ist die Wahrheitstafel einer Formel gegeben, so lassen sich disjunktive und konjunktive Normalform aus dieser „direkt“ ablesen.

Fakten (Fortsetzung)

1. Eine disjunktive Normalform $\bigvee_{K \in \mathcal{K}} K$ in der Signatur Σ heißt *vollständig* falls für jedes $P \in \Sigma$ in jeder Klausel $K \in \mathcal{K}$ eines der Literale P oder $\neg P$ in K vorkommt.
2. Vollständige Normalformen sind eindeutig bis auf Umordnung.

1. Eine disjunktive Normalform $D = \bigvee_{K \in \mathcal{K}} K$ heißt *minimal* falls jede *kürzere* Formel D' nicht äquvalent zu D ist. $D' = \bigvee_{K' \in \mathcal{K}'} K'$, heißt *kürzer* als D falls für alle $K' \in \mathcal{K}'$ ein $K \in \mathcal{K}$ existiert mit K' ist Teilformel von K.
2. Minimale disjunktive und konjunktive Normalformen einer Formel sind <u>nicht</u> eindeutig.

Think!

Überlegen Sie:

Kann man die Erfüllbarkeit einer Formel in DNF effizient überprüfen? Wenn ja, wie?

1. Überlegen Sie ein paar Minuten für sich selbst.
2. Tauschen Sie sich mit Ihrer Sitznachbarin, Ihrem -nachbarn aus.
3. Ergebnisse!

Fakten (Fortsetzung)

1. Die Erfüllbarkeit einer Formel in DNF sowie
2. die Allgemeingültigkeit einer Formel in KNF

lassen sich in polynomieller Zeit überprüfen.

(Die „umgekehrten“ Probleme, z.B. Erfüllbarkeit von KNF, sind viel schwerer!)

Beispiel zur exponentiellen Länge der KNF

Sei

$$A_n = (P_{1,1} \wedge P_{1,2}) \vee \ldots \vee (P_{n,1} \wedge P_{n,2})$$

Die konjunktive Normalform von A_n ist:

$$\bigwedge\{P_{1,f(1)} \vee \ldots \vee P_{n,f(n)} \mid f\colon \{1,\ldots,n\} \to \{1,2\}\}.$$

Fortsetzung des Beispiels

Für $n = 3$ ist das:

$$(P_{1,1} \vee P_{2,1} \vee P_{3,1}) \wedge (P_{1,1} \vee P_{2,1} \vee P_{3,2}) \wedge$$
$$(P_{1,1} \vee P_{2,2} \vee P_{3,1}) \wedge (P_{1,1} \vee P_{2,2} \vee P_{3,2}) \wedge$$
$$(P_{1,2} \vee P_{2,1} \vee P_{3,1}) \wedge (P_{1,2} \vee P_{2,1} \vee P_{3,2}) \wedge$$
$$(P_{1,2} \vee P_{2,2} \vee P_{3,1}) \wedge (P_{1,2} \vee P_{2,2} \vee P_{3,2})$$

In A_n treten $2 * n$ Literale auf, in der KNF $n * 2^n$.

Kurze KNF

Ziel

Finde eine Konstruktion einer Formel in KNF, die *nicht* exponentiell wächst.

Diese KNF kann **nicht immer äquivalent** zur Ausgangsformel sein.

Aber sie ist äquivalent bezüglich einer wichtigen Eigenschaft.
(später mehr)

Konstruktion der kurzen KNF

Allgemeines Verfahren

1. Führe für jede Teilformel, deren oberster Operator binär ist, ein Kürzel (neues Atom) ein.
2. Für jedes dieser Kürzel stelle die Definition gemäß der entspr. Teilformel und unter Berücksichtigung „tieferer“ Kürzel auf.
3. Löse die Äquivalenzen in den Definitionen auf.
4. Forme die Definitionen in KNF um.

Die Konjunktion der Definitionen mit dem Top-Level-Kürzel ist die kurze KNF.

Konstruktion der kurzen KNF

Beispiel

Berechne kKNF für die folgende Formel (äquivalent zu A_3)

$$\neg\big((\neg P_{1,1} \vee \neg P_{1,2}) \wedge (\neg P_{2,1} \vee \neg P_{2,2}) \wedge (\neg P_{3,1} \vee \neg P_{3,2})\big)$$

1. und 2. Schritt:

$Q_1 \leftrightarrow \neg P_{1,1} \vee \neg P_{1,2}$

$Q_2 \leftrightarrow \neg P_{2,1} \vee \neg P_{2,2}$

$Q_3 \leftrightarrow \neg P_{3,1} \vee \neg P_{3,2}$

$Q_4 \leftrightarrow Q_1 \wedge Q_2$

$Q_5 \leftrightarrow Q_4 \wedge Q_3$

$\neg Q_5$

3. Schritt:

$\neg Q_1 \vee \neg P_{1,1} \vee \neg P_{1,2}$

$Q_1 \vee (P_{1,1} \wedge P_{1,2})$

$\neg Q_2 \vee \neg P_{2,1} \vee \neg P_{2,2}$

$Q_2 \vee (P_{2,1} \wedge P_{2,2})$

$\neg Q_3 \vee \neg P_{3,1} \vee \neg P_{3,2}$

$Q_3 \vee (P_{3,1} \wedge P_{3,2})$

$\neg Q_4 \vee (Q_1 \wedge Q_2)$

$Q_4 \vee \neg Q_1 \vee \neg Q_2$

$\neg Q_5 \vee (Q_4 \wedge Q_3)$

$Q_5 \vee \neg Q_4 \vee \neg Q_3$

$\neg Q_5$

Konstruktion der kurzen KNF (Forts.)

3. Schritt:

$\neg Q_1 \vee \neg P_{1,1} \vee \neg P_{1,2}$

$Q_1 \vee (P_{1,1} \wedge P_{1,2})$

$\neg Q_2 \vee \neg P_{2,1} \vee \neg P_{2,2}$

$Q_2 \vee (P_{2,1} \wedge P_{2,2})$

$\neg Q_3 \vee \neg P_{3,1} \vee \neg P_{3,2}$

$Q_3 \vee (P_{3,1} \wedge P_{3,2})$

$\neg Q_4 \vee (Q_1 \wedge Q_2)$

$Q_4 \vee \neg Q_1 \vee \neg Q_2$

$\neg Q_5 \vee (Q_4 \wedge Q_3)$

$Q_5 \vee \neg Q_4 \vee \neg Q_3$

$\neg Q_5$

4. Schritt:

$\neg Q_1 \vee \neg P_{1,1} \vee \neg P_{1,2}$

$(Q_1 \vee P_{1,1}) \wedge (Q_1 \vee P_{1,2})$

$\neg Q_2 \vee \neg P_{2,1} \vee \neg P_{2,2}$

$(Q_2 \vee P_{2,1}) \wedge (Q_2 \vee P_{2,2})$

$\neg Q_3 \vee \neg P_{3,1} \vee \neg P_{3,2}$

$(Q_3 \vee P_{3,1}) \wedge (Q_3 \vee P_{3,2})$

$(\neg Q_4 \vee Q_1) \wedge (\neg Q_4 \vee Q_2)$

$Q_4 \vee \neg Q_1 \vee \neg Q_2$

$(\neg Q_5 \vee Q_4) \wedge (\neg Q_5 \vee Q_3)$

$Q_5 \vee \neg Q_4 \vee \neg Q_3$

$\neg Q_5$

Konjunktion dieser Zeilen ist in KNF und erfüllbarkeitsäquivalent zu A_3

Satz

Theorem

Zu jeder aussagenlogischen Formel A mit n Literalvorkommen gibt es eine konjunktive Normalform A_{kknf}, so dass

- *A ist erfüllbar gdw A_{kknf} erfüllbar ist,*
- *A_{kknf} enthält höchstens $c * n$ Literalvorkommen für eine von n unabhängige Konstante c,*
- *A_{kknf} effektiv aus A in polynomieller (sogar linearer) Zeit konstruiert werden kann.*