

Formale Systeme

Prof. Dr. Bernhard Beckert, WS 2017/2018

Prädikatenlogik: Normalformen

KIT – INSTITUT FÜR THEORETISCHE INFORMATIK

Quiz

Welche der folgenden logischen Folgerungen sind korrekt?

p einstellige Prädikatszeichen

c, d Konstantensymbole

x, y, z Variablen

$p(c)$	$\models \forall x p(x)$	<i>nein</i>
$\forall x p(x)$	$\models p(c)$	<i>ja</i>
$\forall x \exists y A$	$\models \exists y \forall x A$	<i>nein</i>
$\exists x \forall y A$	$\models \forall y \exists x A$	<i>ja</i>
	$\models \forall x \exists y A \rightarrow \exists y \forall x A$	<i>nein</i>
	$\models \exists x \forall y A \rightarrow \forall y \exists x A$	<i>ja</i>

Prädikatenlogische Normalformen

Negationsnormalform

Definition

Eine Formel $A \in \text{For}$ heißt

1. eine **Negationsnormalform**, wenn jedes Negationszeichen in A vor einer atomaren Teilformel steht (insbesondere keine Teilformel der Form $\neg\neg B$) und keine Implikation in A vorkommt
2. *bereinigt*, wenn
 - ▶ $\text{Frei}(A) \cap \text{Bd}(A) = \emptyset$
 - ▶ die hinter Quantoren stehenden Variablen paarweise verschieden sind.

Theorem

Zu jeder Formel A gibt es eine logisch äquivalente

1. *Formel B in Negationsnormalform.*
2. *bereinigte Formel B .*

Definition

$A \in \text{For}$ heißt eine *Pränexe Normalform*, wenn A die Gestalt hat

$$Q_1 x_1 \dots Q_n x_n B$$

mit $Q_i \in \{\forall, \exists\}$, $x_i \in \text{Var}$ und B quantorenfrei. Man nennt B die *Matrix* von A .

Theorem

Zu jeder Formel A gibt es eine äquivalente in Pränex-Normalform.

Die Pränex-Normalform läßt sich aus A durch sukzessive Anwendung der Tautologien

$$\begin{array}{ll} A \wedge QxB \leftrightarrow Qx(A \wedge B)) & x \notin \text{Frei}(A) \\ A \vee QxB \leftrightarrow Qx(A \vee B)) & x \notin \text{Frei}(A) \\ (A \rightarrow QxB) \leftrightarrow Qx(A \rightarrow B)) & x \notin \text{Frei}(A) \\ (\exists xB \rightarrow A) \leftrightarrow \forall x(B \rightarrow A) & x \notin \text{Frei}(A) \\ (\forall xB \rightarrow A) \leftrightarrow \exists x(B \rightarrow A) & x \notin \text{Frei}(A) \end{array}$$

erhalten

Aus

$$\forall y (\forall x (\forall y p(x, y)) \rightarrow \exists x r(x, y))$$

erhält man sukzessive:

$$\forall y (\forall x (\forall z p(x, z)) \rightarrow \exists u r(u, y))$$

Aus

$$\forall y (\forall x (\forall y p(x, y)) \rightarrow \exists x r(x, y))$$

erhält man sukzessive:

$$\forall y (\forall x (\forall z p(x, z)) \rightarrow \exists u r(u, y))$$

$$\forall y (\exists x (\forall z p(x, z) \rightarrow \exists u r(u, y)))$$

Pränexe Normalform

Beispiel

Aus

$$\forall y (\forall x (\forall y p(x, y)) \rightarrow \exists x r(x, y))$$

erhält man sukzessive:

$$\forall y (\forall x (\forall z p(x, z)) \rightarrow \exists u r(u, y))$$

$$\forall y (\exists x (\forall z p(x, z) \rightarrow \exists u r(u, y)))$$

$$\forall y (\exists x (\exists z (p(x, z) \rightarrow \exists u r(u, y))))$$

Aus

$$\forall y (\forall x (\forall y p(x, y)) \rightarrow \exists x r(x, y))$$

erhält man sukzessive:

$$\forall y (\forall x (\forall z p(x, z)) \rightarrow \exists u r(u, y))$$

$$\forall y (\exists x (\forall z p(x, z) \rightarrow \exists u r(u, y)))$$

$$\forall y (\exists x (\exists z (p(x, z) \rightarrow \exists u r(u, y))))$$

$$\forall y (\exists x (\exists z (\exists u (p(x, z) \rightarrow r(u, y)))))$$

Aus

$$\forall y (\forall x (\forall y p(x, y)) \rightarrow \exists x r(x, y))$$

erhält man sukzessive:

$$\forall y (\forall x (\forall z p(x, z)) \rightarrow \exists u r(u, y))$$

$$\forall y (\exists x (\forall z p(x, z) \rightarrow \exists u r(u, y)))$$

$$\forall y (\exists x (\exists z (p(x, z) \rightarrow \exists u r(u, y))))$$

$$\forall y \exists x \exists z \exists u (p(x, z) \rightarrow r(u, y))$$

Eindeutigkeit?

Abhängig von der Reihenfolge der angewandten Äquivalenzen kann man z. B. aus

sowohl
als auch
erhalten.

$$\forall x p(x) \rightarrow \forall y q(y)$$

$$\exists x \forall y (p(x) \rightarrow q(y))$$

$$\forall y \exists x (p(x) \rightarrow q(y))$$

Darstellung mit Existenzquantor

1. $\forall x \exists y (y \doteq x + x)$
2. $\forall x \exists y (x < y)$
3. $\forall x \forall y \exists z (x < y \rightarrow x + z \doteq y)$

Darstellung mit Funktionszeichen

1. $\forall x (do(x) \doteq x + x)$
2. $\forall x (x < gr(x))$
3. $\forall x \forall y (x < y \rightarrow x + diff(x, y) \doteq y)$

Noch einmal die Funktionszeichen mit ihren Interpretationen

Darstellung mit Funktionszeichen

1. $\forall x(do(x) \doteq x + x)$
2. $\forall x(x < gr(x))$
3. $\forall x \forall y(x < y \rightarrow x + diff(x, y) \doteq y)$

Interpretationen

1. $do^{\mathcal{N}_1}(d) = d + d$ (einzige Möglichkeit)
2. etwa: $gr^{\mathcal{N}_2}(d) = d + 1$
3. etwa:

$$diff^{\mathcal{N}_3}(d_1, d_2) = \begin{cases} d_2 - d_1 & \text{falls } d_1 < d_2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Der Wert im Fall $d_2 \leq d_1$ ist willkürlich gewählt.

Definition

Eine Formel ist in *Skolem-Normalform*, wenn sie

- ▶ geschlossen ist
- ▶ die Gestalt $\forall x_1 \dots \forall x_n B$ hat mit quantorenfreiem B
- ▶ die Matrix B in KNF ist.

Theorem

Zu jedem $A \in \text{For}_\Sigma$ gibt es eine endliche Erweiterung Σ_{sk} von Σ und eine Formel $A_{sk} \in \text{For}_{\Sigma_{sk}}$ mit

- ▶ A_{sk} ist in Skolem-Normalform*
- ▶ A_{sk} hat ein Modell genau dann, wenn A ein Modell hat.*

A_{sk} läßt sich aus A algorithmisch erhalten.

Allgemeine Konstruktionsvorschrift

0. All-Abschluss der freien Variablen
1. Transformation in pränex Normalform: $Q_1 x_1 \dots Q_n x_n B$
2. Skolemisierung
 - (a) Signatur-Erweiterung von Σ zu Σ_{sk} :
Für jedes i , $1 \leq i \leq n$, so daß $Q_i = \exists$ wird ein neues k -stelliges Funktionszeichen f_i hinzugefügt, wobei k die Anzahl der Q_j mit $Q_j = \forall$ und $j < i$
 - (b) Für alle $Q_i = \exists$:
 - Lasse $\exists x_i$ weg
 - Substituiere x_i in B durch $f_i(\bar{x}_i)$, wobei $\bar{x}_i$ das Tupel aller Variablen x_j mit $1 \leq j < i$ und $Q_j = \forall$ ist.
3. Transformation der Matrix der Formel in KNF.

Gegeben:

$$\forall x(\exists y(p(y)) \wedge \exists z(q(x, z)))$$

Pränex Normalform:

$$\forall x \exists y \exists z (p(y) \wedge q(x, z))$$

Skolem Normalform:

$$\forall x (p(f_1(x)) \wedge q(x, f_2(x)))$$

Beispiel 2

Gegeben:

$$\exists x(p(w, x) \vee \forall y(q(w, x, y) \wedge \exists z r(y, z)))$$

All-Abschluß:

$$\forall w \exists x(p(w, x) \vee \forall y(q(w, x, y) \wedge \exists z r(y, z)))$$

Gegeben:

$$\exists x(p(w, x) \vee \forall y(q(w, x, y) \wedge \exists z r(y, z)))$$

All-Abschluß:

$$\forall w \exists x(p(w, x) \vee \forall y(q(w, x, y) \wedge \exists z r(y, z)))$$

Pränex Normalform:

$$\forall w \exists x \forall y \exists z(p(w, x) \vee (q(w, x, y) \wedge r(y, z)))$$

Beispiel 2

Gegeben:

$$\exists x(p(w, x) \vee \forall y(q(w, x, y) \wedge \exists z r(y, z)))$$

All-Abschluß:

$$\forall w \exists x(p(w, x) \vee \forall y(q(w, x, y) \wedge \exists z r(y, z)))$$

Pränex Normalform:

$$\forall w \exists x \forall y \exists z(p(w, x) \vee (q(w, x, y) \wedge r(y, z)))$$

Skolemisierung:

$$\forall w \forall y(p(w, f_1(w)) \vee (q(w, f_1(w), y) \wedge r(y, f_2(w, y))))$$

Beispiel 2

Gegeben:

$$\exists x(p(w, x) \vee \forall y(q(w, x, y) \wedge \exists z r(y, z)))$$

All-Abschluß:

$$\forall w \exists x(p(w, x) \vee \forall y(q(w, x, y) \wedge \exists z r(y, z)))$$

Pränex Normalform:

$$\forall w \exists x \forall y \exists z(p(w, x) \vee (q(w, x, y) \wedge r(y, z)))$$

Skolemisierung:

$$\forall w \forall y(p(w, f_1(w)) \vee (q(w, f_1(w), y) \wedge r(y, f_2(w, y))))$$

Matrix in KNF, Skolem Normalform:

$$\forall w \forall y((p(w, f_1(w)) \vee q(w, f_1(w), y)) \wedge \\ (p(w, f_1(w)) \vee r(y, f_2(w, y))))$$

Grundinstanzen

Sei $A := \forall x_1 \dots \forall x_n B$

mit quantoremfreiem B eine geschlossenen Formel.

Eine **Grundinstanz** von A ist eine Formel

$$\{x_1/t_1, \dots, x_n/t_n\}(B)$$

mit Grundtermen $t_1, \dots, t_n$.

Ist M eine Menge geschlossener, universell quantifizierter Formeln, so sei

$$\text{Grundinstanzen}(M)$$

die Menge **aller** Grundinstanzen **aller** Formeln in M .

Herbrand-Strukturen

Definition

Die Signatur Σ enthalte mindestens eine Konstante.

Eine Interpretation (D, I) von Σ heißt *Herbrand-Interpretation* oder *Herbrand-Struktur*, wenn

1. $D = \text{Term}_{\Sigma}^0 =$ Menge der Grundterme.
2. $I(f)(t_1, \dots, t_n) = f(t_1, \dots, t_n)$
für alle Funktionssymbole $f \in \Sigma$
und beliebige Grundterme $t_1, \dots, t_n$.

In einer Herbrand-Struktur wird jeder Grundterm t als er selbst interpretiert,

$$\text{val}_{D,I}(t) = t$$

Spielraum für *verschiedene* Herbrand-Strukturen gibt es nur bei der Interpretation der Prädikatsymbole.

Theorem

Σ enthalte mindestens eine Konstante, und es sei M eine Menge geschlossener, universell quantifizierter Formeln. Ferner enthalte keine Formel in M das Gleichheitssymbol $\doteq$. Dann sind äquivalente Aussagen

- 1. M hat ein Modell*
- 2. M hat ein Herbrand-Modell*
- 3. Grundinstanzen(M) hat ein Modell*
- 4. Grundinstanzen(M) hat ein Herbrand-Modell.*

1. M hat ein Modell
2. M hat ein Herbrand-Modell
3. Grundinstanzen(M) hat ein Modell
4. Grundinstanzen(M) hat ein Herbrand-Modell.

Die Implikationen $4 \Rightarrow 3$ und $2 \Rightarrow 1$ sind trivial;
ebenso wegen der Allgemeingültigkeit von

$$\forall x_1 \dots \forall x_n B \rightarrow \{x_1/t_1, \dots, x_n/t_n\}(B)$$

die Implikationen $1 \Rightarrow 3$ und $2 \Rightarrow 4$.

Es genügt zusätzlich noch zu zeigen, daß $3 \Rightarrow 2$.

Es sei $\mathcal{D}$ ein Modell von Grundinstanzen(M).

Wir definieren eine Herbrand-Interpretation $\mathcal{H} = (Term_{\Sigma}^0, J)$.

$$J(p) := \{(t_1, \dots, t_n) \mid t_i \in Term_{\Sigma}^0, val_{\mathcal{D}}(p(t_1, \dots, t_n)) = W\}$$

für Prädikatsymbole p einer Stelligkeit n .

Für jedes geschlossene Atom A gilt also $val_{\mathcal{H}}(A) = val_{\mathcal{D}}(A)$

Durch Induktion beweist man diese Relation für alle geschlossenen, quantorenfreien Formeln A .

Für $\forall x_1 \dots \forall x_n B \in M$ gilt

$$\begin{aligned} val_{\mathcal{D}}(\{x_1/t_1, \dots, x_n/t_n\}B) &= W && \text{für alle Grundinstanzen } t_1, \dots, t_n \\ val_{\mathcal{H}}(\{x_1/t_1, \dots, x_n/t_n\}B) &= W && \text{für alle Grundinstanzen } t_1, \dots, t_n \\ val_{\mathcal{H}}(\forall x_1 \dots \forall x_n B) &= W \end{aligned}$$

Einschub:

Endlichkeitssatz (Kompaktheitssatz) der Aussagenlogik

Theorem

*Sei U eine unendliche Menge aussagenlogischer Formeln.
 U ist genau dann unerfüllbar, wenn
es eine endliche Teilmenge $E \subset U$ gibt, die unerfüllbar ist.*

Beweis später

Satz von HERBRAND

2. Form

Sei ϕ eine quantorenfreie Formel ohne Gleichheit mit (nur) einer freien Variablen x . Dann gilt

1.

$\exists x \phi$ ist allgemeingültig

gdw

es gibt ein $n \in \mathbb{N}$ und
Grundterme $t_1, \dots, t_n$,
so dass

$\phi(t_1) \vee \dots \vee \phi(t_n)$

allgemeingültig ist.

2.

$\forall x \phi$ ist unerfüllbar

gdw

es gibt ein $n \in \mathbb{N}$ und
Grundterme $t_1, \dots, t_n$,
so dass

$\phi(t_1) \wedge \dots \wedge \phi(t_n)$

unerfüllbar ist.

Beweis der 2. Form des Satzes von HERBRAND

(2. Form folgt aus 1. Form des Satzes + Endlichkeitssatz)

1.:

$\exists x \phi$ ist allgemeingültig

$\Leftrightarrow \neg \exists x \phi$ ist unerfüllbar

$\Leftrightarrow \forall x \neg \phi$ ist unerfüllbar

$\Leftrightarrow \{\neg \phi(t) \mid t \text{ Grundterm}\}$ ist unerfüllbar

$\Leftrightarrow$ es gibt ein n und $t_1, \dots, t_n$ so daß
 $\{\neg \phi(t_1), \dots, \neg \phi(t_n)\}$ ist unerfüllbar
(Anwendung des Endlichkeitssatzes der Aussagenlogik)

$\Leftrightarrow \neg \phi(t_1) \wedge \dots \wedge \neg \phi(t_n)$ ist unerfüllbar

$\Leftrightarrow \phi(t_1) \vee \dots \vee \phi(t_n)$ ist allgemeingültig

2.: Analog