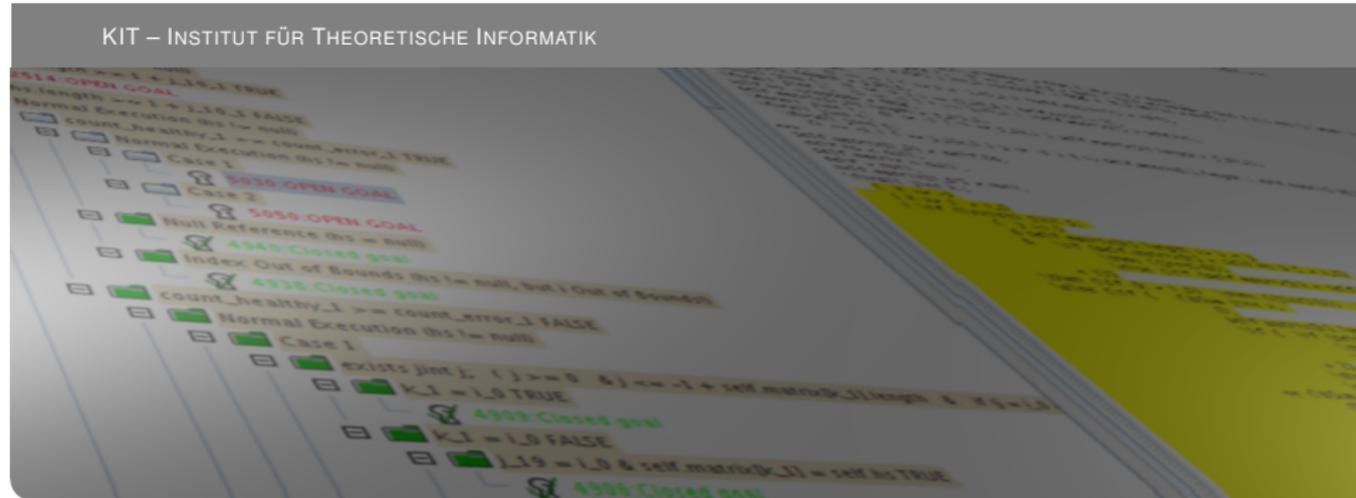


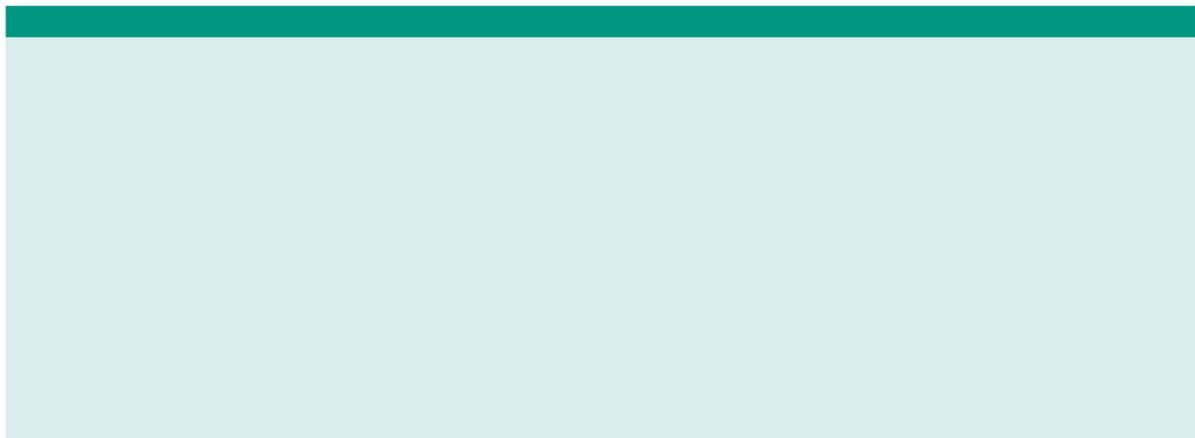
# Formale Systeme

Prof. Dr. Bernhard Beckert, WS 2017/2018

Beweistheorie: Motivierendes Beispiel

KIT – INSTITUT FÜR THEORETISCHE INFORMATIK





- ▶ Eine der Wurzeln der modernen Logik ist das Interesse an einer systematischen Analyse des menschlichen Denkens.

- ▶ Eine der Wurzeln der modernen Logik ist das Interesse an einer systematischen Analyse des menschlichen Denkens.
- ▶ Wir fokussieren in dieser Vorlesung auf den Teil des menschlichen Denkens, den man mit *logischem Schließen* enger eingrenzen kann.

- ▶ Eine der Wurzeln der modernen Logik ist das Interesse an einer systematischen Analyse des menschlichen Denkens.
- ▶ Wir fokussieren in dieser Vorlesung auf den Teil des menschlichen Denkens, den man mit *logischem Schließen* enger eingrenzen kann.
- ▶ Wir beginnen mit einem Beispiel aus der Alltagslogik.

## Frage

Kann mein Bruder mein Schwager sein?

## Frage

Kann mein Bruder mein Schwager sein?

## Frage

Kann mein Bruder mein Schwager sein?

## Antwort

## Frage

Kann mein Bruder mein Schwager sein?

## Antwort

1. Nehmen wir mal an, mein Bruder wäre mein Schwager.

## Frage

Kann mein Bruder mein Schwager sein?

## Antwort

1. Nehmen wir mal an, mein Bruder wäre mein Schwager.
2. Nach allgemeinem Sprachgebrauch ist ein Schwager der Bruder meiner Frau  
*(die andere Schwager-Variante – Mann der Schwester – lassen wir außen vor).*

## Frage

Kann mein Bruder mein Schwager sein?

## Antwort

1. Nehmen wir mal an, mein Bruder wäre mein Schwager.
2. Nach allgemeinem Sprachgebrauch ist ein Schwager der Bruder meiner Frau  
*(die andere Schwager-Variante – Mann der Schwester – lassen wir außen vor).*
3. Wenn aber mein Bruder auch der Bruder meiner Frau ist, dann ist meine Frau meine Schwester.

## Frage

Kann mein Bruder mein Schwager sein?

## Antwort

1. Nehmen wir mal an, mein Bruder wäre mein Schwager.
2. Nach allgemeinem Sprachgebrauch ist ein Schwager der Bruder meiner Frau  
*(die andere Schwager-Variante – Mann der Schwester – lassen wir außen vor).*
3. Wenn aber mein Bruder auch der Bruder meiner Frau ist, dann ist meine Frau meine Schwester.
4. Nach deutschem Eherecht darf niemand mit seiner Schwester verheiratet sein.

## Frage

Kann mein Bruder mein Schwager sein?

## Antwort

1. Nehmen wir mal an, mein Bruder wäre mein Schwager.
2. Nach allgemeinem Sprachgebrauch ist ein Schwager der Bruder meiner Frau  
*(die andere Schwager-Variante – Mann der Schwester – lassen wir außen vor).*
3. Wenn aber mein Bruder auch der Bruder meiner Frau ist, dann ist meine Frau meine Schwester.
4. Nach deutschem Eherecht darf niemand mit seiner Schwester verheiratet sein.
5. Also kann mein Bruder nicht mein Schwager sein.

# Formalisierung

Konstanten: *Bruno* und *i* (ich)

1. *Bruno* ist mein Bruder.

*bruder(Bruno, i)*

# Formalisierung

Konstanten: *Bruno* und *i* (ich)

1. *Bruno* ist mein Bruder.
2. *Bruno* ist mein Schwager.

*bruder(Bruno, i)*  
*schwager(Bruno, i)*

Konstanten: *Bruno* und *i* (ich)

1. *Bruno* ist mein Bruder. *bruder(Bruno, i)*
2. *Bruno* ist mein Schwager. *schwager(Bruno, i)*
3. Wenn jemand mein Schwager ist, dann ist er ein Bruder meiner Frau.  
 $\forall x(\textit{schwager}(x, i) \rightarrow \textit{bruder}(x, \textit{fr}(i)))$

Konstanten: *Bruno* und *i* (ich)

1. *Bruno* ist mein Bruder.  $bruder(Bruno, i)$
2. *Bruno* ist mein Schwager.  $schwager(Bruno, i)$
3. Wenn jemand mein Schwager ist, dann ist er ein Bruder meiner Frau.  
 $\forall x (schwager(x, i) \rightarrow bruder(x, fr(i)))$
4. Nach deutschem Eherecht darf niemand mit seiner Schwester verheiratet sein.  
 $\forall x (\neg schwester(fr(x), x))$

Konstanten: *Bruno* und *i* (ich)

1. *Bruno* ist mein Bruder.  $bruder(Bruno, i)$
2. *Bruno* ist mein Schwager.  $schwager(Bruno, i)$
3. Wenn jemand mein Schwager ist, dann ist er ein Bruder meiner Frau.  
 $\forall x (schwager(x, i) \rightarrow bruder(x, fr(i)))$
4. Nach deutschem Eherecht darf niemand mit seiner Schwester verheiratet sein.  
 $\forall x (\neg schwester(fr(x), x))$
5. *Bruno* ist ein Bruder meiner Frau.  
 $bruder(Bruno, fr(i))$

Konstanten: *Bruno* und *i* (ich)

1. *Bruno* ist mein Bruder.  $bruder(Bruno, i)$
2. *Bruno* ist mein Schwager.  $schwager(Bruno, i)$
3. Wenn jemand mein Schwager ist, dann ist er ein Bruder meiner Frau.  
 $\forall x (schwager(x, i) \rightarrow bruder(x, fr(i)))$
4. Nach deutschem Eherecht darf niemand mit seiner Schwester verheiratet sein.  
 $\forall x (\neg schwester(fr(x), x))$
5. *Bruno* ist ein Bruder meiner Frau.  
 $bruder(Bruno, fr(i))$
6. Meine Frau ist meine Schwester  
 $schwester(fr(i), i)$

Konstanten: *Bruno* und *i* (ich)

1. *Bruno* ist mein Bruder.  $bruder(Bruno, i)$
2. *Bruno* ist mein Schwager.  $schwager(Bruno, i)$
3. Wenn jemand mein Schwager ist, dann ist er ein Bruder meiner Frau.  
 $\forall x (schwager(x, i) \rightarrow bruder(x, fr(i)))$
4. Nach deutschem Eherecht darf niemand mit seiner Schwester verheiratet sein.  
 $\forall x (\neg schwester(fr(x), x))$
5. *Bruno* ist ein Bruder meiner Frau.  
 $bruder(Bruno, fr(i))$
6. Meine Frau ist meine Schwester  
 $schwester(fr(i), i)$
7. Widerspruch

1.  $bruder(Bruno, i)$
2.  $schwager(Bruno, i)$
3.  $\forall x (schwager(x, i) \rightarrow bruder(x, fr(i)))$
4.  $\forall x (\neg schwester(fr(x), x))$
5.  $bruder(Bruno, fr(i))$
6.  $schwester(fr(i), i)$
7. Widerspruch

1. *bruder*(Bruno, *i*)
2. *schwager*(Bruno, *i*)
3.  $\forall x(\textit{schwager}(x, i) \rightarrow \textit{bruder}(x, \textit{fr}(i)))$
4.  $\forall x(\neg \textit{schwester}(\textit{fr}(x), x))$
5. *bruder*(Bruno, *fr*(*i*))
6. *schwester*(*fr*(*i*), *i*)
7. Widerspruch

1. ist ein Faktum, das im vorliegenden Kontext gilt.

1. *bruder*(Bruno, *i*)
2. *schwager*(Bruno, *i*)
3.  $\forall x(\textit{schwager}(x, i) \rightarrow \textit{bruder}(x, \textit{fr}(i)))$
4.  $\forall x(\neg \textit{schwester}(\textit{fr}(x), x))$
5. *bruder*(Bruno, *fr*(*i*))
6. *schwester*(*fr*(*i*), *i*)
7. Widerspruch

2. ist eine Annahme für die augenblickliche Argumentation.

1. *bruder*(Bruno, *i*)
2. *schwager*(Bruno, *i*)
3.  $\forall x(\textit{schwager}(x, i) \rightarrow \textit{bruder}(x, \textit{fr}(i)))$
4.  $\forall x(\neg \textit{schwester}(\textit{fr}(x), x))$
5. *bruder*(Bruno, *fr*(*i*))
6. *schwester*(*fr*(*i*), *i*)
7. Widerspruch

3. und 4. sind Fakten, die auch außerhalb des vorliegenden Kontexts gelten.

1. *bruder*(Bruno, *i*)
2. *schwager*(Bruno, *i*)
3.  $\forall x(\textit{schwager}(x, i) \rightarrow \textit{bruder}(x, \textit{fr}(i)))$
4.  $\forall x(\neg \textit{schwester}(\textit{fr}(x), x))$
5. *bruder*(Bruno, *fr*(*i*))
6. *schwester*(*fr*(*i*), *i*)
7. Widerspruch

5. ist eine Folgerung aus 2 und 3.  
Genauer Analyse folgt gleich.

1.  $bruder(Bruno, i)$
2.  $schwager(Bruno, i)$
3.  $\forall x (schwager(x, i) \rightarrow bruder(x, fr(i)))$
4.  $\forall x (\neg schwester(fr(x), x))$
5.  $bruder(Bruno, fr(i))$
6.  $schwester(fr(i), i)$
7. Widerspruch

6. ist wieder eine Folgerung aus den vorangegangenen Aussagen.

Das schauen wir uns danach genauer an.

# Erster Schritt zur Analyse

1.  $bruder(Bruno, i)$
2.  $schwager(Bruno, i)$
3.  $\forall x(schwager(x, i) \rightarrow bruder(x, fr(i)))$
4.  $\forall x(\neg schwester(fr(x), x))$
5.  $bruder(Bruno, fr(i))$
6.  $schwester(fr(i), i)$
7. Widerspruch

Zu 7. Aus 4. können wir schließen auf 4a.  $\neg schwester(fr(i), i)$ .  
Das ist ein Schluß vom Allgemeinen auf das Besondere.  
4a. und 6. bilden jetzt einen elementaren Widerspruch.

Wie kommt man von 2. und 3. zu 5.?

2. *schwager*(Bruno, *i*)
3.  $\forall x(\textit{schwager}(x, i) \rightarrow \textit{bruder}(x, \textit{fr}(i)))$
5. *bruder*(Bruno, *fr*(*i*))

Wie kommt man von 2. und 3. zu 5.?

2. *schwager*(Bruno, *i*)
3.  $\forall x(\textit{schwager}(x, i) \rightarrow \textit{bruder}(x, \textit{fr}(i)))$
5. *bruder*(Bruno, *fr*(*i*))

| vom Allgemeinen zum Besonderen | Modus Ponens |
|--------------------------------|--------------|
|                                |              |
|                                |              |

Wie kommt man von 2. und 3. zu 5.?

2. *schwager*(Bruno, *i*)
3.  $\forall x(\textit{schwager}(x, i) \rightarrow \textit{bruder}(x, \textit{fr}(i)))$
5. *bruder*(Bruno, *fr*(*i*))

| vom Allgemeinen zum Besonderen   | Modus Ponens |
|--|--------------|
| $\frac{\forall x(\textit{schw}(x, i) \rightarrow \textit{br}(x, \textit{fr}(i)))}{\textit{schw}(\textit{Bruno}, i) \rightarrow \textit{br}(\textit{Bruno}, \textit{fr}(i))}$ |              |
|  |              |

Wie kommt man von 2. und 3. zu 5.?

2. *schwager*(Bruno, *i*)
3.  $\forall x(\textit{schwager}(x, i) \rightarrow \textit{bruder}(x, \textit{fr}(i)))$
5. *bruder*(Bruno, *fr*(*i*))

| vom Allgemeinen zum Besonderen   | Modus Ponens |
|--|--------------|
| $\frac{\forall x(\textit{schw}(x, i) \rightarrow \textit{br}(x, \textit{fr}(i)))}{\textit{schw}(\textit{Bruno}, i) \rightarrow \textit{br}(\textit{Bruno}, \textit{fr}(i))}$ |              |
| $\frac{\forall x(\phi(x))}{\phi(t)} \text{ f\"ur beliebigen Term } t.$   |              |

Wie kommt man von 2. und 3. zu 5.?

2. *schwager*(Bruno, *i*)
3.  $\forall x(\textit{schwager}(x, i) \rightarrow \textit{bruder}(x, \textit{fr}(i)))$
5. *bruder*(Bruno, *fr*(*i*))

| vom Allgemeinen zum Besonderen   | Modus Ponens  |
|--|---|
| $\frac{\forall x(\textit{schw}(x, i) \rightarrow \textit{br}(x, \textit{fr}(i)))}{\textit{schw}(\textit{Bruno}, i) \rightarrow \textit{br}(\textit{Bruno}, \textit{fr}(i))}$ | $\frac{\textit{schw}(\textit{Bruno}, i) \rightarrow \textit{br}(\textit{Bruno}, \textit{fr}(i)) \quad \textit{schw}(\textit{Bruno}, i)}{\textit{br}(\textit{Bruno}, \textit{fr}(i))}$ |
| $\frac{\forall x(\phi(x))}{\phi(t)} \text{ f\u00fcr beliebigen Term } t.$  |   |

# Analyse eines Beweisschritts

Wie kommt man von 2. und 3. zu 5.?

2. *schwager*(Bruno, *i*)
3.  $\forall x(\textit{schwager}(x, i) \rightarrow \textit{bruder}(x, \textit{fr}(i)))$
5. *bruder*(Bruno, *fr*(*i*))

| vom Allgemeinen zum Besonderen   | Modus Ponens  |
|--|---|
| $\frac{\forall x(\textit{schw}(x, i) \rightarrow \textit{br}(x, \textit{fr}(i)))}{\textit{schw}(\textit{Bruno}, i) \rightarrow \textit{br}(\textit{Bruno}, \textit{fr}(i))}$ | $\frac{\textit{schw}(\textit{Bruno}, i) \rightarrow \textit{br}(\textit{Bruno}, \textit{fr}(i)) \quad \textit{schw}(\textit{Bruno}, i)}{\textit{br}(\textit{Bruno}, \textit{fr}(i))}$ |
| $\frac{\forall x(\phi(x))}{\phi(t)} \text{ f\u00fcr beliebigen Term } t.$  | $\frac{A \rightarrow B \quad A}{B}$   |

# Analyse eines weiteren Beweisschritts

Wie kann man 6 aus 1 und 5 herleiten?

1. *bruder(Bruno, i)*
5. *bruder(Bruno, fr(i))*
6. *schwester(fr(i), i)*

# Analyse eines weiteren Beweisschritts

Wie kann man 6 aus 1 und 5 herleiten?

1. *bruder(Bruno, i)*
5. *bruder(Bruno, fr(i))*
6. *schwester(fr(i), i)*

Wir haben, offensichtlich, vergessen, ein Faktum in die Formalisierung mit aufzunehmen:

# Analyse eines weiteren Beweisschritts

Wie kann man 6 aus 1 und 5 herleiten?

1. *bruder*(Bruno, *i*)
5. *bruder*(Bruno, *fr(i)*)
6. *schwester*(*fr(i)*, *i*)

Wir haben, offensichtlich, vergessen, ein Faktum in die Formalisierung mit aufzunehmen:

7. Wenn jemand gleichzeitig mein Bruder und der Bruder einer Frau ist, dann ist diese Frau meine Schwester

$$\forall x \forall y \forall z (\textit{bruder}(x, y) \wedge \textit{bruder}(x, z) \wedge w(z) \rightarrow \textit{schwester}(z, y))$$

Dabei ist  $w()$  ein einstellige Prädikat für *weiblich*.

# Analyse eines weiteren Beweisschritts

Wie kann man 6 aus 1 und 5 herleiten?

1. *bruder*(Bruno, *i*)
5. *bruder*(Bruno, *fr*(*i*))
6. *schwester*(*fr*(*i*), *i*)

Wir haben, offensichtlich, vergessen, ein Faktum in die Formalisierung mit aufzunehmen:

7. Wenn jemand gleichzeitig mein Bruder und der Bruder einer Frau ist, dann ist diese Frau meine Schwester

$$\forall x \forall y \forall z (\textit{bruder}(x, y) \wedge \textit{bruder}(x, z) \wedge w(z) \rightarrow \textit{schwester}(z, y))$$

Dabei ist  $w()$  ein einstellige Prädikat für *weiblich*.

Außerdem:

$$8. \forall x (w(\textit{fr}(x)))$$

# Analyse eines weiteren Beweisschritts

Wie kann man 6. aus 1., 5. und 7. herleiten?

1.  $bruder(Bruno, i)$
5.  $bruder(Bruno, fr(i))$
7.  $\forall x \forall y \forall z (bruder(x, y) \wedge bruder(x, z) \wedge w(z) \rightarrow schwester(z, y))$
8.  $\forall x (w(fr(x)))$
6.  $schwester(fr(i), i)$

# Analyse eines weiteren Beweisschritts

Wie kann man 6. aus 1., 5. und 7. herleiten?

1.  $bruder(Bruno, i)$
5.  $bruder(Bruno, fr(i))$
7.  $\forall x \forall y \forall z (bruder(x, y) \wedge bruder(x, z) \wedge w(z) \rightarrow schwester(z, y))$
8.  $\forall x (w(fr(x)))$
6.  $schwester(fr(i), i)$

Schluß vom Allgemeinen zum Besonderen:

- 7a.  $bruder(Bruno, i) \wedge bruder(Bruno, fr(i)) \wedge w(fr(i))$   
 $\rightarrow schwester(fr(i), i)$
- 8a.  $w(fr(i))$

# Analyse eines weiteren Beweisschritts

Wie kann man 6. aus 1., 5. und 7. herleiten?

1.  $bruder(Bruno, i)$
5.  $bruder(Bruno, fr(i))$
7.  $\forall x \forall y \forall z (bruder(x, y) \wedge bruder(x, z) \wedge w(z) \rightarrow schwester(z, y))$
8.  $\forall x (w(fr(x)))$
6.  $schwester(fr(i), i)$

Schluß vom Allgemeinen zum Besonderen:

- 7a.  $bruder(Bruno, i) \wedge bruder(Bruno, fr(i)) \wedge w(fr(i)) \rightarrow schwester(fr(i), i)$
- 8a.  $w(fr(i))$

Daraus folgt 6. mit modus ponens.

*Genau genommen zuerst Zwischenschritt:*

*Aus Einzelformeln 1, 5, 8a auf Formel  $1 \wedge 5 \wedge 8a$  schließen*