

# **Formale Systeme**

Prof. Dr. Bernhard Beckert, WS 2017/2018

Aussagenlogik: Tableaukalkül



# Kalküle für die Aussagenlogik



Übersicht

- Hilbert-Kalkül
- 2. Resolutionskalkül
- 3. Tableaukalkül
- 4. Sequenzenkalkül

# Der aussagenlogische Tableaukalkül



## Wesentliche Eigenschaften

► Widerlegungskalkül: Testet auf Unerfüllbarkeit

$$M \models A \Leftrightarrow M \cup \{\neg A\} \vdash_{\mathsf{T0}} \mathsf{0}.$$

- ► Beweis durch Fallunterscheidung
- Top-down-Analyse der gegebenen Formeln

# Der aussagenlogische Tableaukalkül



#### Vorteile

- Intuitiver als Resolution
- ▶ Formeln müssen nicht in Normalform sein
- Falls Formelmenge erfüllbar ist (Test schlägt fehl), wird ein Gegenbeispiel (eine erfüllende Interpretation) konstruiert

#### Nachteil

Mehr als eine Regel

# Kleine Deutsch- und Englischsstunde



#### Deutsch

```
das Tableau
```

des Tableaus (Gen.) die Tableaus (pl.)

der Tableaukalkül (nicht das)

## **Englisch**

the tableau (sing.) the tableaux (pl.)

the tableau calculus

### Vorzeichenformel



## Definition (Vorzeichenformel)

Eine Vorzeichenformel ist eine Zeichenkette der Gestalt

 $0A ext{ oder } 1A ext{ mit } A \in For 0.$ 

0, 1 sind neue Sonderzeichen (die Vorzeichen) im Alphabet der Objektsprache.

#### **Definition**

Wir setzen *val<sub>i</sub>* fort auf die Menge aller Vorzeichenformeln durch

$$val_I(0A) = val_I(\neg A),$$

und

$$val_I(1A) = val_I(A)$$
.

### **Uniforme Notation**



# Konjunktive Formeln: Typ $\alpha$

- ► 1(*A* ∧ *B*)
- ▶  $0(A \lor B)$
- **▶** 0(*A* → *B*)
- ▶ 0¬A
- ► 1¬A

# Disjunktive Formeln: Typ $\beta$

- ▶  $0(A \land B)$
- ► 1(*A* ∨ *B*)
- ► 1(*A* → *B*)



Raymond Smullyan

### **Uniforme Notation**



# Zuordnungsregeln Formeln / Unterformeln

$\alpha$	$\alpha_1$	$\alpha_2$
$1(A \wedge B)$	1 <i>A</i>	1 <i>B</i>
$0(A \vee B)$	0 <i>A</i>	0 <i>B</i>
$0(A \rightarrow B)$	1 <i>A</i>	0 <i>B</i>
0¬A	1 <i>A</i>	1 <i>A</i>
1 <i>¬A</i>	0 <i>A</i>	0 <i>A</i>

$$\begin{array}{c|cccc} & \beta & \beta_1 & \beta_2 \\ \hline 0(A \land B) & 0A & 0B \\ 1(A \lor B) & 1A & 1B \\ 1(A \to B) & 0A & 1B \\ \end{array}$$

# Regeln des (aussagenlogischen) Tableaukalküls



$$\frac{\alpha}{\alpha_1}$$

 $\alpha_2$ 

$$1(p \wedge q)$$

$$1p$$

$$1q$$

$$\frac{\beta}{\beta_1 \mid \beta_2}$$

disjunktiv

$$\begin{array}{ccc}
1(p \lor q) \\
p & 1q
\end{array}$$

<u>01</u>

10

Widerspruch

# Instanzen der $\alpha$ - und $\beta$ -Regel



### Instanzen der $\alpha$ -Regel

$$\frac{1(P \wedge Q)}{1P}$$
1 Q

$$\frac{1(P \land Q)}{1P} \qquad \frac{0(P \lor Q)}{0P} \\
1Q \qquad 0Q$$

$$\frac{0(P \to Q)}{1P}$$

$$0Q$$

$$\frac{0\neg P}{1P}$$

$$\frac{1\neg P}{0P}$$

# Instanzen der $\beta$ -Regel

$$\frac{1(P \vee Q)}{1P \mid 1Q}$$

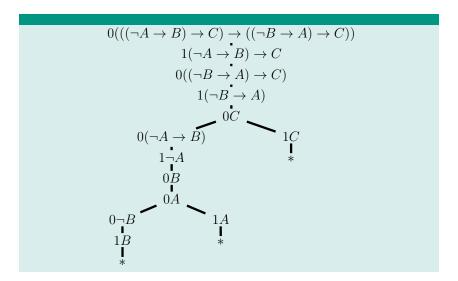
$$\frac{1(P \lor Q)}{1P \mid 1Q} \qquad \frac{0(P \land Q)}{0P \mid 0Q}$$

$$\frac{1(P \to Q)}{0P \mid 1Q}$$

# Beispiel:



$$\models (((\neg A \to B) \to C) \to ((\neg B \to A) \to C))$$



# Determinismus von Kalkül und Regeln



#### **Determinismus**

- Die Regeln sind alle deterministisch
- Der Kalkül aber nicht:
   Wahl der nächsten Formel, auf die Regel angewendet wird

#### Heuristik

Nicht-verzweigende Regeln zuerst: " $\alpha$  vor  $\beta$ "

#### Nota bene

Selbe Formel kann mehrfach (auf verschiedenen Ästen) verwendet werden – unter Umständen ist das auch notwendig!



Definition: Tableau

Binärer Baum, dessen Knoten mit Vorzeichenformeln markiert sind

Definition: Tableauast

Maximaler Pfad in einem Tableau (von Wurzel zu Blatt)



## Erweiterung

- ▶ T ein Tableau für A über M
- ▶ B ein Ast von T
- ▶ F eine Formel auf B, die kein Atom ist

T' entstehe durch Erweiterung von B gemäß der auf F anwendbaren Regel ( $\alpha$  oder  $\beta$ ) Dann ist T' ein Tableau für A über M



### Voraussetzungsregel

- ► T ein Tableau für A über M
- ► F eine Formel in M

T' entstehe durch Erweiterung eines beliebigen Astes durch 1F Dann ist T' ein Tableau für A über M



#### Definition: Geschlossener Ast

Ast B eines Tableaus ist geschlossen, wenn

 $1F, 0F \in B$  oder  $10 \in B$  oder  $01 \in B$ 

#### Definition: Geschlossenes Tableau

Ein Tableau ist geschlossen, wenn jeder seiner Äste geschlossen ist

#### Definition: Tableaubeweis

Ein Tableau für A über M, das geschlossen ist, ist ein Tableaubeweis für  $M \cup \{\neg A\} \vdash_{T0} \mathbf{0}$  und damit für  $M \models A$ 

# Korrektheit und Vollständigkeit des Tableaukalküls



#### **Theorem**

Es gilt  $M \models A$ genau dann, wenn es einen Tableaubeweis für A über M gibt

## Kern des Korrektheitsbeweises



#### Definition: Erfüllbares Tableau

Tableauast ist erfüllbar, wenn die Menge seiner Formeln erfüllbar ist

Tableau ist erfüllbar, wenn es (mindestens) einen erfüllbaren Ast hat

#### Lemma

Jedes Tableau für A über M ist erfüllbar, falls  $M \cup \{\neg A\}$  erfüllbar ist.

#### Lemma

Ein geschlossenes Tableau ist nicht erfüllbar

### Korrektheitslemma



Initialisierung: *I* ist Modell von  $M \cup \{\neg A\}$ , also von 0*A*.

Voraussetzung: I ist Modell von  $M \cup \{\neg A\}$ , also von 1F für alle  $F \in M$ .

#### $\alpha$ -Fall ( $\beta$ -Fall analog):

- Nach Ind.-Ann. erfüllt / einen Ast π in T.
- ▶ Zur Anwendung der  $\alpha$ -Regel wird ein Ast  $\pi_1$  in T und eine  $\alpha$ -Formel  $\alpha$  auf  $\pi_1$  gewählt,  $\pi_1$  wird verlängert um  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$ .
- ▶ Wenn  $\pi_1 \neq \pi$ , ist  $\pi$  ein Ast in T', und damit (trivial) auch T' erfüllt.
- ▶ Wenn  $\pi_1 = \pi$ , haben wir aus  $val_l(\pi) = W$ , dass  $val_l(\alpha) = W$ , also  $val_l(\alpha_1) = W$  und  $val_l(\alpha_2) = W$ .
- ► Somit  $val_I(\pi') = W$  für den neu entstehenden Pfad  $\pi'$ , d.h. T' ist erfüllbar

# Kern des Vollständigkeitsbeweises



## Definition: Voll expandiertes Tableau

Ein Tableau heißt voll expandiert, wenn

- ▶ jede Regel
- auf jede passende Formel
- ▶ auf jedem offenen Ast

angewendet worden ist und

- ▶ für jedes  $F \in M$  (hierfür muss M endlich sein)
- ▶ für jeden Ast B

1F auf B vorkommt

# Kern des Vollständigkeitsbeweises



#### Lemma

Ist *B* ein offener Ast in einem voll expandierten Tableau, dann ist *B* erfüllbar.

#### Also

Ist  $M \cup \{\neg A\}$  unerfüllbar,

also jeder Ast jedes vollexpandierten Tableaus für *A* über *M* unerfüllbar.

dann ist jedes voll expandierte Tableau für A über M geschlossen

(denn sonst wäre er wegen des Lemmas erfüllbar)

# Kern des Vollständigkeitsbeweises



#### **Beweis**

Sei B ein offener Ast eines voll expandierten Tableaus

Wir definieren

$$I(P) := \left\{ egin{array}{ll} W & ext{falls } 1P \in B \\ F & ext{falls } 0P \in B \\ ext{bel.} & ext{sonst} \end{array} 
ight.$$

Durch Induktion zeigt man leicht:  $val_I(F) = W$  für jedes F auf B.

Es folgt, dass *I* Modell von  $M \cup \{\neg A\}$  ist.

# Allgemeine Tableauregel



$$\begin{array}{c|cccc} \phi \\ \hline \psi_{1,1} & \cdots & \psi_{n,1} \\ \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \psi_{1,K_1} & \cdots & \psi_{n,K_n} \end{array}$$

Um die Teilformeleigenschaft des Tableaukalküls zu gewährleisten, wird gefordert, dass alle Vorzeichenformeln  $\psi_{i,j}$  Teilformeln der Vorzeichenformel  $\phi$  sind.

# Korrektheit und Vollständigkeit einer Regel



Eine allgemeine Tableauregel

$$\begin{array}{c|cccc}
 & \phi \\
\hline
 & \psi_{1,1} & \cdots & \psi_{n,1} \\
\vdots & & \cdots & \vdots \\
 & \vdots & & \vdots \\
 & \psi_{1,K_1} & \cdots & \psi_{n,K_n}
\end{array}$$

heißt vollständig und korrekt, wenn für jede Interpretation I gilt  $val_I(\phi) = W$  gdw es gibt ein i,  $1 \le i \le n$ , so dass für alle j,  $1 \le j \le k_i$  gilt  $val_I(\psi_{i,j}) = W$ 

# Tableauregel für den logischen Äquivalenzoperator



$\leftrightarrow$	W	F
W	W	F
F	F	W

$$\begin{array}{c|c}
1(A \leftrightarrow B) & 0(A \leftrightarrow B) \\
1A & 0A & 1A & 0A \\
1B & 0B & 0B & 1B
\end{array}$$