

Formale Systeme

Prof. Dr. Bernhard Beckert, WS 2017/2018

Aussagenlogik: Tableauealkül

KIT – INSTITUT FÜR THEORETISCHE INFORMATIK

Kalküle für die Aussagenlogik

Übersicht

1. Hilbert-Kalkül

Kalküle für die Aussagenlogik

Übersicht

1. Hilbert-Kalkül
2. Resolutionskalkül

Kalküle für die Aussagenlogik

Übersicht

1. Hilbert-Kalkül
2. Resolutionskalkül
3. **Tableaukalkül**

Kalküle für die Aussagenlogik

Übersicht

1. Hilbert-Kalkül
2. Resolutionskalkül
3. **Tableaukalkül**
4. Sequenzenkalkül

Wesentliche Eigenschaften

- Widerlegungskalkül: Testet auf Unerfüllbarkeit

$$M \models A \quad \Leftrightarrow \quad M \cup \{\neg A\} \vdash_{\text{TO}} 0.$$

Wesentliche Eigenschaften

- Widerlegungskalkül: Testet auf Unerfüllbarkeit

$$M \models A \quad \Leftrightarrow \quad M \cup \{\neg A\} \vdash_{\text{TO}} \mathbf{0}.$$

- Beweis durch Fallunterscheidung

Wesentliche Eigenschaften

- ▶ Widerlegungskalkül: Testet auf Unerfüllbarkeit

$$M \models A \quad \Leftrightarrow \quad M \cup \{\neg A\} \vdash_{\text{TO}} 0.$$

- ▶ Beweis durch Fallunterscheidung
- ▶ Top-down-Analyse der gegebenen Formeln

Vorteile

- ▶ Intuitiver als Resolution

Vorteile

- ▶ Intuitiver als Resolution
- ▶ Formeln müssen nicht in Normalform sein

Vorteile

- ▶ Intuitiver als Resolution
- ▶ Formeln müssen nicht in Normalform sein
- ▶ Falls Formelmenge erfüllbar ist (Test schlägt fehl), wird ein Gegenbeispiel (eine erfüllende Interpretation) konstruiert

Vorteile

- ▶ Intuitiver als Resolution
- ▶ Formeln müssen nicht in Normalform sein
- ▶ Falls Formelmenge erfüllbar ist (Test schlägt fehl), wird ein Gegenbeispiel (eine erfüllende Interpretation) konstruiert

Vorteile

- ▶ Intuitiver als Resolution
- ▶ Formeln müssen nicht in Normalform sein
- ▶ Falls Formelmenge erfüllbar ist (Test schlägt fehl), wird ein Gegenbeispiel (eine erfüllende Interpretation) konstruiert

Nachteil

- ▶ Mehr als eine Regel

Deutsch

das	Tableau	
des	Tableaus <u>u</u>	(Gen.)
die	Tableaus <u>e</u>	(pl.)

Kleine Deutsch- und Englischsstunde

Deutsch

das	Tableau	
des	Tableaus_	(Gen.)
die	Tableaus_	(pl.)
der	Tableaukalkül	(<i>nicht</i> das)

Kleine Deutsch- und Englischsstunde

Deutsch

das	Tableau	
des	Tableaus	(Gen.)
die	Tableaus	(pl.)
der	Tableaukalkül	(<i>nicht</i> das)

Englisch

the	tableau	(sing.)
the	tableaux	(pl.)
the	tableau calculus	

Definition (Vorzeichenformel)

Eine **Vorzeichenformel** ist eine Zeichenkette der Gestalt

$$0A \text{ oder } 1A \quad \text{mit } A \in \text{For}_0.$$

0, 1 sind neue Sonderzeichen (die Vorzeichen) im Alphabet der Objektsprache.

Definition (Vorzeichenformel)

Eine **Vorzeichenformel** ist eine Zeichenkette der Gestalt

$$0A \text{ oder } 1A \quad \text{mit } A \in \text{For}_0.$$

0, 1 sind neue Sonderzeichen (die Vorzeichen) im Alphabet der Objektsprache.

Definition (Vorzeichenformel)

Eine **Vorzeichenformel** ist eine Zeichenkette der Gestalt

$$0A \text{ oder } 1A \quad \text{mit } A \in \text{For}_0.$$

0, 1 sind neue Sonderzeichen (die Vorzeichen) im Alphabet der Objektsprache.

Definition

Wir setzen val_I fort auf die Menge aller Vorzeichenformeln durch

$$val_I(0A) = val_I(\neg A),$$

und

$$val_I(1A) = val_I(A).$$

Konjunktive Formeln: Typ α

- ▶ $1(A \wedge B)$
- ▶ $0(A \vee B)$
- ▶ $0(A \rightarrow B)$

Konjunktive Formeln: Typ α

- ▶ $1(A \wedge B)$
- ▶ $0(A \vee B)$
- ▶ $0(A \rightarrow B)$
- ▶ $0\neg A$
- ▶ $1\neg A$

Konjunktive Formeln: Typ α

- ▶ $1(A \wedge B)$
- ▶ $0(A \vee B)$
- ▶ $0(A \rightarrow B)$
- ▶ $0\neg A$
- ▶ $1\neg A$

Disjunktive Formeln: Typ β

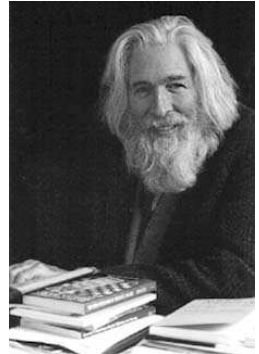
- ▶ $0(A \wedge B)$
- ▶ $1(A \vee B)$
- ▶ $1(A \rightarrow B)$

Konjunktive Formeln: Typ α

- ▶ $1(A \wedge B)$
- ▶ $0(A \vee B)$
- ▶ $0(A \rightarrow B)$
- ▶ $0\neg A$
- ▶ $1\neg A$

Disjunktive Formeln: Typ β

- ▶ $0(A \wedge B)$
- ▶ $1(A \vee B)$
- ▶ $1(A \rightarrow B)$



Raymond Smullyan

Zuordnungsregeln Formeln / Unterformeln

α	α_1	α_2
$1(A \wedge B)$	$1A$	$1B$
$0(A \vee B)$	$0A$	$0B$
$0(A \rightarrow B)$	$1A$	$0B$
$0\neg A$	$1A$	$1A$
$1\neg A$	$0A$	$0A$

Zuordnungsregeln Formeln / Unterformeln

α	α_1	α_2
$1(A \wedge B)$	$1A$	$1B$
$0(A \vee B)$	$0A$	$0B$
$0(A \rightarrow B)$	$1A$	$0B$
$0\neg A$	$1A$	$1A$
$1\neg A$	$0A$	$0A$

β	β_1	β_2
$0(A \wedge B)$	$0A$	$0B$
$1(A \vee B)$	$1A$	$1B$
$1(A \rightarrow B)$	$0A$	$1B$

Regeln des (aussagenlogischen) Tableaukalküls

$$\frac{\alpha}{\alpha_1}$$
$$\alpha_2$$

konjunktiv

$$1(p \wedge q)$$
$$\quad \vdots$$
$$1p$$
$$\quad \vdots$$
$$1q$$

Regeln des (aussagenlogischen) Tableaukalküls

$$\frac{\alpha}{\alpha_1 \quad \alpha_2}$$

konjunktiv

$$\begin{array}{c} 1(p \wedge q) \\ | \\ 1p \\ | \\ 1q \end{array}$$

$$\frac{\beta}{\beta_1 \mid \beta_2}$$

disjunktiv

$$\begin{array}{c} 1(p \vee q) \\ / \quad \backslash \\ 1p \quad 1q \end{array}$$

Regeln des (aussagenlogischen) Tableaukalküls

$$\frac{\alpha}{\alpha_1 \alpha_2}$$

konjunktiv

$$1(p \wedge q) \\ \begin{array}{c} | \\ 1p \\ | \\ 1q \end{array}$$

$$\frac{\beta}{\beta_1 \mid \beta_2}$$

disjunktiv

$$1(p \vee q) \\ \begin{array}{cc} / & \backslash \\ 1p & 1q \end{array}$$

$$\frac{1F}{0F} \\ *$$

$$\frac{01}{*}$$

$$\frac{10}{*}$$

Widerspruch

$$\begin{array}{c} 1F \\ | \\ 0F \\ | \\ * \end{array}$$

$$\begin{array}{c} 01 \\ | \\ * \end{array}$$

$$\begin{array}{c} 10 \\ | \\ * \end{array}$$

Instanzen der α - und β -Regel

Instanzen der α -Regel

$$\frac{1(P \wedge Q)}{1P}$$

$$1P$$

$$1Q$$

$$\frac{0(P \vee Q)}{0P}$$

$$0P$$

$$0Q$$

$$\frac{0(P \rightarrow Q)}{1P}$$

$$1P$$

$$0Q$$

$$\frac{0\neg P}{1P}$$

$$1P$$

$$\frac{1\neg P}{0P}$$

$$0P$$

Instanzen der α - und β -Regel

Instanzen der α -Regel

$$\frac{1(P \wedge Q)}{1P}$$
$$1Q$$

$$\frac{0(P \vee Q)}{0P}$$
$$0Q$$

$$\frac{0(P \rightarrow Q)}{1P}$$
$$0Q$$

$$\frac{0\neg P}{1P}$$

$$\frac{1\neg P}{0P}$$

Instanzen der β -Regel

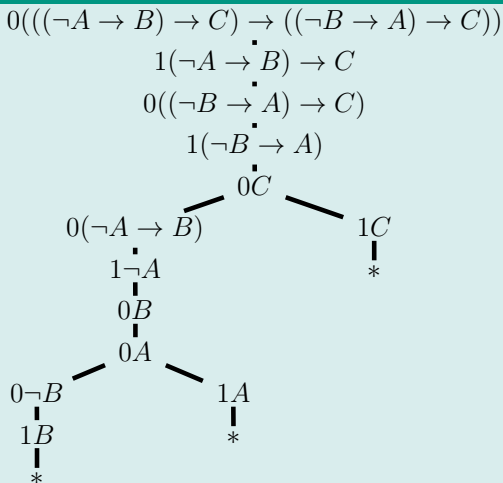
$$\frac{1(P \vee Q)}{1P \mid 1Q}$$

$$\frac{0(P \wedge Q)}{0P \mid 0Q}$$

$$\frac{1(P \rightarrow Q)}{0P \mid 1Q}$$

Beispiel:

$$\models (((\neg A \rightarrow B) \rightarrow C) \rightarrow ((\neg B \rightarrow A) \rightarrow C))$$



Determinismus von Kalkül und Regeln

Determinismus

- ▶ Die Regeln sind alle deterministisch

Determinismus

- ▶ Die Regeln sind alle deterministisch
- ▶ **Der Kalkül aber nicht:**
Wahl der nächsten Formel, auf die Regel angewendet wird

Determinismus

- ▶ Die Regeln sind alle deterministisch
- ▶ Der Kalkül aber nicht:
Wahl der nächsten Formel, auf die Regel angewendet wird

Determinismus von Kalkül und Regeln

Determinismus

- ▶ Die Regeln sind alle deterministisch
- ▶ Der Kalkül aber nicht:
Wahl der nächsten Formel, auf die Regel angewendet wird

Heuristik

Nicht-verzweigende Regeln zuerst: „ α vor β “

Determinismus von Kalkül und Regeln

Determinismus

- ▶ Die Regeln sind alle deterministisch
- ▶ Der Kalkül aber nicht:
Wahl der nächsten Formel, auf die Regel angewendet wird

Heuristik

Nicht-verzweigende Regeln zuerst: „ α vor β “

Nota bene

Selbe Formel kann mehrfach (auf verschiedenen Ästen) verwendet werden – unter Umständen ist das auch notwendig!

Definition: Tableau

Binärer Baum, dessen Knoten mit Vorzeichenformeln markiert sind

Definition: Tableau

Binärer Baum, dessen Knoten mit Vorzeichenformeln markiert sind

Definition: Tableauast

Maximaler Pfad in einem Tableau (von Wurzel zu Blatt)

Erweiterung

- ▶ T ein Tableau für A über M

Erweiterung

- ▶ T ein Tableau für A über M
- ▶ B ein Ast von T

Erweiterung

- ▶ T ein Tableau für A über M
- ▶ B ein Ast von T
- ▶ F eine Formel auf B , die kein Atom ist

Erweiterung

- ▶ T ein Tableau für A über M
- ▶ B ein Ast von T
- ▶ F eine Formel auf B , die kein Atom ist

T' entstehe durch Erweiterung von B gemäß der auf F anwendbaren Regel (α oder β)

Erweiterung

- ▶ T ein Tableau für A über M
- ▶ B ein Ast von T
- ▶ F eine Formel auf B , die kein Atom ist

T' entstehe durch Erweiterung von B gemäß der auf F anwendbaren Regel (α oder β)

Dann ist T' ein Tableau für A über M

Voraussetzungsregel

- ▶ T ein Tableau für A über M
- ▶ F eine Formel in M

Voraussetzungsregel

- ▶ T ein Tableau für A über M
- ▶ F eine Formel in M

T' entstehe durch Erweiterung eines beliebigen Astes durch $1F$

Voraussetzungsregel

- ▶ T ein Tableau für A über M
- ▶ F eine Formel in M

T' entstehe durch Erweiterung eines beliebigen Astes durch $1F$
Dann ist T' ein Tableau für A über M

Definition: Geschlossener Ast

Ast B eines Tableaus ist geschlossen, wenn

$$1F, 0F \in B \quad \text{oder} \quad 10 \in B \quad \text{oder} \quad 01 \in B$$

Definition: Geschlossener Ast

Ast B eines Tableaus ist geschlossen, wenn

$$1F, 0F \in B \text{ oder } 10 \in B \text{ oder } 01 \in B$$

Definition: Geschlossenes Tableau

Ein Tableau ist geschlossen, wenn jeder seiner Äste geschlossen ist

Definition: Geschlossener Ast

Ast B eines Tableaus ist geschlossen, wenn

$$1F, 0F \in B \quad \text{oder} \quad 1\mathbf{0} \in B \quad \text{oder} \quad 0\mathbf{1} \in B$$

Definition: Geschlossenes Tableau

Ein Tableau ist geschlossen, wenn jeder seiner Äste geschlossen ist

Definition: Tableaubeweis

Ein Tableau für A über M , das geschlossen ist, ist ein Tableaubeweis für $M \cup \{\neg A\} \vdash_{T0} \mathbf{0}$ und damit für $M \models A$

Korrektheit und Vollständigkeit des Tableaukalküls

Theorem

Es gilt $M \models A$
genau dann, wenn
es einen Tableaubeweis für A über M gibt

Definition: Erfüllbares Tableau

Tableauast ist erfüllbar, wenn die Menge seiner Formeln erfüllbar ist

Tableau ist erfüllbar, wenn es (mindestens) einen erfüllbaren Ast hat

Definition: Erfüllbares Tableau

Tableauast ist erfüllbar, wenn die Menge seiner Formeln erfüllbar ist

Tableau ist erfüllbar, wenn es (mindestens) einen erfüllbaren Ast hat

Lemma

Jedes Tableau für A über M ist erfüllbar, falls $M \cup \{\neg A\}$ erfüllbar ist.

Definition: Erfüllbares Tableau

Tableauast ist erfüllbar, wenn die Menge seiner Formeln erfüllbar ist

Tableau ist erfüllbar, wenn es (mindestens) einen erfüllbaren Ast hat

Lemma

Jedes Tableau für A über M ist erfüllbar, falls $M \cup \{\neg A\}$ erfüllbar ist.

Lemma

Ein geschlossenes Tableau ist nicht erfüllbar

Definition: Erfüllbares Tableau

Tableauast ist erfüllbar, wenn die Menge seiner Formeln erfüllbar ist

Tableau ist erfüllbar, wenn es (mindestens) einen erfüllbaren Ast hat

Lemma

Jedes Tableau für A über M ist erfüllbar, falls $M \cup \{\neg A\}$ erfüllbar ist.

Lemma

Ein geschlossenes Tableau ist nicht erfüllbar

Initialisierung: I ist Modell von $M \cup \{\neg A\}$, also von $\neg A$.

Initialisierung: I ist Modell von $M \cup \{\neg A\}$, also von $0A$.

Voraussetzung: I ist Modell von $M \cup \{\neg A\}$,
also von $1F$ für alle $F \in M$.

Korrekttheitslemma

Initialisierung: I ist Modell von $M \cup \{\neg A\}$, also von $0A$.

Voraussetzung: I ist Modell von $M \cup \{\neg A\}$,
also von $1F$ für alle $F \in M$.

α -Fall (β -Fall analog):

Korrektheitslemma

Initialisierung: I ist Modell von $M \cup \{\neg A\}$, also von $0A$.

Voraussetzung: I ist Modell von $M \cup \{\neg A\}$,
also von $1F$ für alle $F \in M$.

α -Fall (β -Fall analog):

- Nach Ind.-Ann. erfüllt I einen Ast π in T .

Korrektheitslemma

Initialisierung: I ist Modell von $M \cup \{\neg A\}$, also von $0A$.

Voraussetzung: I ist Modell von $M \cup \{\neg A\}$,
also von $1F$ für alle $F \in M$.

α -Fall (β -Fall analog):

- ▶ Nach Ind.-Ann. erfüllt I einen Ast π in T .
- ▶ Zur Anwendung der α -Regel wird ein Ast π_1 in T und eine α -Formel α auf π_1 gewählt, π_1 wird verlängert um α_1, α_2 .

Korrektheitslemma

Initialisierung: I ist Modell von $M \cup \{\neg A\}$, also von $0A$.

Voraussetzung: I ist Modell von $M \cup \{\neg A\}$,
also von $1F$ für alle $F \in M$.

α -Fall (β -Fall analog):

- ▶ Nach Ind.-Ann. erfüllt I einen Ast π in T .
- ▶ Zur Anwendung der α -Regel wird ein Ast π_1 in T und eine α -Formel α auf π_1 gewählt, π_1 wird verlängert um α_1, α_2 .
- ▶ Wenn $\pi_1 \neq \pi$, ist π ein Ast in T' , und damit (trivial) auch T' erfüllt.

Korrektheitslemma

Initialisierung: I ist Modell von $M \cup \{\neg A\}$, also von $0A$.

Voraussetzung: I ist Modell von $M \cup \{\neg A\}$,
also von $1F$ für alle $F \in M$.

α -Fall (β -Fall analog):

- ▶ Nach Ind.-Ann. erfüllt I einen Ast π in T .
- ▶ Zur Anwendung der α -Regel wird ein Ast π_1 in T und eine α -Formel α auf π_1 gewählt, π_1 wird verlängert um α_1, α_2 .
- ▶ Wenn $\pi_1 \neq \pi$, ist π ein Ast in T' , und damit (trivial) auch T' erfüllt.
- ▶ Wenn $\pi_1 = \pi$, haben wir aus $val_I(\pi) = W$, dass $val_I(\alpha) = W$, also $val_I(\alpha_1) = W$ und $val_I(\alpha_2) = W$.

Korrekttheitslemma

Initialisierung: I ist Modell von $M \cup \{\neg A\}$, also von $0A$.

Voraussetzung: I ist Modell von $M \cup \{\neg A\}$,
also von $1F$ für alle $F \in M$.

α -Fall (β -Fall analog):

- ▶ Nach Ind.-Ann. erfüllt I einen Ast π in T .
- ▶ Zur Anwendung der α -Regel wird ein Ast π_1 in T und eine α -Formel α auf π_1 gewählt, π_1 wird verlängert um α_1, α_2 .
- ▶ Wenn $\pi_1 \neq \pi$, ist π ein Ast in T' , und damit (trivial) auch T' erfüllt.
- ▶ Wenn $\pi_1 = \pi$, haben wir aus $val_I(\pi) = W$, dass $val_I(\alpha) = W$, also $val_I(\alpha_1) = W$ und $val_I(\alpha_2) = W$.
- ▶ Somit $val_I(\pi') = W$ für den neu entstehenden Pfad π' , d.h. T' ist erfüllbar

Definition: Voll expandiertes Tableau

Ein Tableau heißt voll expandiert, wenn

- ▶ jede Regel
- ▶ auf jede passende Formel
- ▶ auf jedem offenen Ast

angewendet worden ist und

- ▶ für jedes $F \in M$ (hierfür muss M endlich sein)
- ▶ für jeden Ast B

1 F auf B vorkommt

Lemma

Ist B ein offener Ast in einem voll expandierten Tableau, dann ist B erfüllbar.

Lemma

Ist B ein offener Ast in einem voll expandierten Tableau, dann ist B erfüllbar.

Also

Ist $M \cup \{\neg A\}$ unerfüllbar,
also jeder Ast jedes voll expandierten Tableaus für A über M
unerfüllbar,
dann ist jedes voll expandierte Tableau für A über M
geschlossen
(denn sonst wäre er wegen des Lemmas erfüllbar)

Beweis

Sei B ein offener Ast eines voll expandierten Tableaus

Beweis

Sei B ein offener Ast eines voll expandierten Tableaus

Wir definieren

$$I(P) := \begin{cases} W & \text{falls } 1P \in B \\ F & \text{falls } 0P \in B \\ \text{bel.} & \text{sonst} \end{cases}$$

Beweis

Sei B ein offener Ast eines voll expandierten Tableaus

Wir definieren

$$I(P) := \begin{cases} W & \text{falls } 1P \in B \\ F & \text{falls } 0P \in B \\ \text{bel.} & \text{sonst} \end{cases}$$

Durch Induktion zeigt man leicht:

$val_I(F) = W$ für jedes F auf B .

Beweis

Sei B ein offener Ast eines voll expandierten Tableaus

Wir definieren

$$I(P) := \begin{cases} W & \text{falls } 1P \in B \\ F & \text{falls } 0P \in B \\ \text{bel.} & \text{sonst} \end{cases}$$

Durch Induktion zeigt man leicht:

$val_I(F) = W$ für jedes F auf B .

Es folgt, dass I Modell von $M \cup \{\neg A\}$ ist.

ϕ		
$\psi_{1,1}$	$\dots$	$\psi_{n,1}$
$\vdots$	$\dots$	$\vdots$
$\vdots$	$\dots$	$\vdots$
ψ_{1,k_1}	$\dots$	ψ_{n,k_n}

Um die Teilformeleigenschaft des Tableaukalküls zu gewährleisten, wird gefordert, dass alle Vorzeichenformeln $\psi_{i,j}$ Teilformeln der Vorzeichenformel ϕ sind.

Korrektheit und Vollständigkeit einer Regel

Eine allgemeine Tableauregel

ϕ		
$\psi_{1,1}$	$\dots$	$\psi_{n,1}$
$\vdots$	$\dots$	$\vdots$
$\vdots$	$\dots$	$\vdots$
ψ_{1,k_1}	$\dots$	ψ_{n,k_n}

heißt vollständig und korrekt, wenn für jede Interpretation I gilt
 $val_I(\phi) = W$ gdw es gibt ein i , $1 \leq i \leq n$, so dass
für alle j , $1 \leq j \leq k_i$ gilt $val_I(\psi_{i,j}) = W$

Tableauregel für den logischen Äquivalenzoperator

$\leftrightarrow$	<i>W</i>	<i>F</i>
<i>W</i>	<i>W</i>	<i>F</i>
<i>F</i>	<i>F</i>	<i>W</i>

Tableauregel für den logischen Äquivalenzoperator

$\leftrightarrow$	W	F
W	W	F
F	F	W

$$\frac{1(A \leftrightarrow B)}{\begin{array}{l|l} 1A & 0A \\ 1B & 0B \end{array}}$$

Tableauregel für den logischen Äquivalenzoperator

$\leftrightarrow$	W	F
W	W	F
F	F	W

$1(A \leftrightarrow B)$		$0(A \leftrightarrow B)$	
$1A$	$0A$	$1A$	$0A$
$1B$	$0B$	$0B$	$1B$