

Formale Systeme

Prof. Dr. Bernhard Beckert, WS 2017/2018

Tableaukalkül (ohne Gleichheit)

KIT – INSTITUT FÜR THEORETISCHE INFORMATIK

Wesentliche Eigenschaften

- ▶ Widerlegungskalkül: Testet auf Unerfüllbarkeit

$$M \models A \quad \Leftrightarrow \quad M \cup \{\neg A\} \vdash_{\mathbf{T}} \mathbf{0}.$$

- ▶ Beweis durch Fallunterscheidung
- ▶ Top-down-Analyse der gegebenen Formeln

Vorteile

- ▶ Intuitiver als Resolution
- ▶ Formeln müssen nicht in Normalform sein
- ▶ Im aussagenlogischen Fall:
Falls Formelmenge erfüllbar ist (Beweis schlägt fehl),
wird ein Gegenbeispiel (eine erfüllende Interpretation)
konstruiert

Nachteil

- ▶ Mehr als eine Regel

Vorbereitung 1

Definition (Vorzeichenformel Syntax)

Eine **Vorzeichenformel** ist eine Zeichenkette der Gestalt

$$0A \text{ oder } 1A \quad \text{mit } A \in \text{For0}.$$

0, 1 sind neue Sonderzeichen (die Vorzeichen) im Alphabet der Objektsprache.

Definition (Vorzeichenformeln Semantik)

Wir setzen val_I fort auf die Menge aller Vorzeichenformeln durch

$$val_I(0A) = val_I(\neg A),$$

und

$$val_I(1A) = val_I(A).$$

Uniforme Notation

konjunktive Formeln

Typ α

$$1(A \wedge B)$$

$$0(A \vee B)$$

$$0(A \rightarrow B)$$

$$0\neg A$$

$$1\neg A$$

disjunktive Formeln

Typ β

$$0(A \wedge B)$$

$$1(A \vee B)$$

$$1(A \rightarrow B)$$

Universelle Formeln

Typ γ

$$1\forall x A(x)$$

$$0\exists x A(x)$$

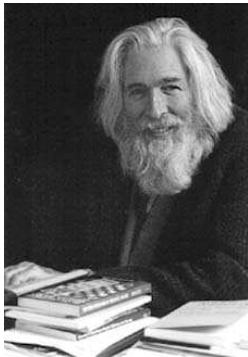
existentielle Formeln

Typ δ

$$1\exists x A(x)$$

$$0\forall x A(x)$$

Die universelle Notation wurde eingeführt von



Raymond Smullyan

Zuordnung Formeln / Unterformeln

α	α_1	α_2
$1(A \wedge B)$	$1A$	$1B$
$0(A \vee B)$	$0A$	$0B$
$0(A \rightarrow B)$	$1A$	$0B$
$0\neg A$	$1A$	$1A$
$1\neg A$	$0A$	$0A$

γ	γ_1
$1\forall xA$	$1A$
$0\exists xA$	$0A$

β	β_1	β_2
$0(A \wedge B)$	$0A$	$0B$
$1(A \vee B)$	$1A$	$1B$
$1(A \rightarrow B)$	$0A$	$1B$

δ	δ_1
$1\exists xA$	$1A$
$0\forall xA$	$0A$

Tableauregeln

$$\alpha\text{-Regel} \quad \frac{\alpha}{\alpha_1 \quad \alpha_2}$$

$$\beta\text{-Regel} \quad \frac{\beta}{\beta_1 | \beta_2}$$

$$\gamma\text{-Regel} \quad \frac{\gamma}{\gamma_1(Y)}$$

für eine neue Variable Y

$$\delta\text{-Regel} \quad \frac{\delta}{\delta_1(f(X_1, \dots, X_n))}$$

f ein neues Funktionssymbol

$X_1, \dots, X_n$

alle freien Variablen in δ

Definition: Tableau

Ein Tableau ist ein binärer Baum, dessen Knoten mit Vorzeichenformeln markiert sind.

Definition: Tableauast

Maximaler Pfad in einem Tableau (von Wurzel zu Blatt)

Tableaukonstruktion

Sei M eine Formelmenge, sei A eine Formel

Initialisierung

Das Tableau, das nur aus dem Knoten $0A$ besteht, ist ein Tableau für A über M .

Erweiterung

- ▶ T ein Tableau für A über M
- ▶ B ein Ast von T
- ▶ F eine Formel auf B , die kein Atom ist

T' entstehe durch Erweiterung von B gemäß der auf F anwendbaren Regel

Dann ist T' ein Tableau für A über M

Voraussetzungsregel

- ▶ T ein Tableau für A über M
- ▶ F eine Formel in M

T' entstehe durch Erweiterung eines beliebigen Astes durch $1F$
Dann ist T' ein Tableau für A über M

Definition: Geschlossener Ast

Ein Ast B eines Tableaus ist geschlossen, wenn

$$1F, 0F \in B$$

Definition: Geschlossenes Tableau

Ein Tableau T ist geschlossen,
wenn es eine kollisionsfreie Substitution σ gibt,
so daß für jeden Ast B von T
der substituierte Ast $\sigma(B)$ geschlossen ist.

Tableaubeweis

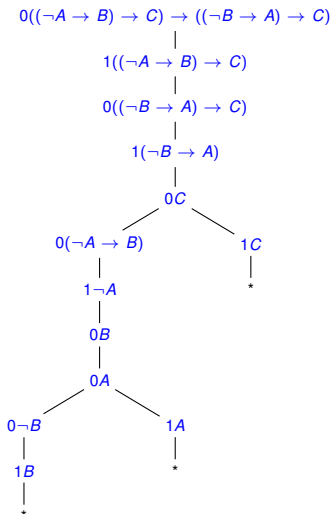
Falls ein geschlossenes Tableau für A über M existiert,
so sagen wir

A ist im Tableaukalkül aus den Voraussetzungen M beweisbar
und schreiben

$$M \vdash_T A$$

Ausagenlogisches Beispiel

Ist $((\neg A \rightarrow B) \rightarrow C) \rightarrow ((\neg B \rightarrow A) \rightarrow C)$ eine Tautologie?



Ein prädikatenlogisches Beispiel

Ist $\forall x p(x) \rightarrow \exists y p(y)$ eine Tautologie?

0	$\forall x p(x) \rightarrow \exists y p(y)$	(Start)
1	$\forall x p(x)$	(α -Regel)
0	$\exists y p(y)$	(α -Regel)
1	$p(X)$	(γ -Regel)
0	$p(Y)$	(γ -Regel)

Ein prädikatenlogisches Beispiel

Ist $\forall x p(x) \rightarrow \exists y p(y)$ eine Tautologie?

$$\begin{array}{ll}
 0 \forall x p(x) \rightarrow \exists y p(y) & \text{(Start)} \\
 | & \\
 1 \forall x p(x) & (\alpha\text{-Regel}) \\
 | & \\
 0 \exists y p(y) & (\alpha\text{-Regel}) \\
 | & \\
 1 p(X) & (\gamma\text{-Regel}) \\
 | & \\
 0 p(Y) & (\gamma\text{-Regel})
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 \sigma = \\
 \implies \\
 \{Y/X\}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
 0 \forall x p(x) \rightarrow \exists y p(y) & \\
 | & \\
 1 \forall x p(x) & \\
 | & \\
 0 \exists y p(y) & \\
 | & \\
 1 p(X) & \\
 | & \\
 0 p(X) &
 \end{array}$$

Anwendung der Abschlußregel.

$$1[] \quad 0 \exists y \forall x p(x, y) \rightarrow \forall x \exists y p(x, y)$$

$$2[1] \quad 1 \exists y \forall x p(x, y)$$

$$3[1] \quad 0 \forall x \exists y p(x, y)$$

$$4[2] \quad 1 \forall x p(x, a)$$

$$5[3] \quad 0 \exists y p(b, y)$$

$$6[4] \quad 1 p(X, a)$$

$$7[5] \quad 0 p(b, Y)$$

geschlossen mit $\sigma(X) = b$ und $\sigma(Y) = a$

$$1[] \quad 0\forall x\exists y p(x, y) \rightarrow \exists y\forall x p(x, y)$$

$$2[1] \quad 0\exists y\forall x p(x, y)$$

$$3[1] \quad 1\forall x\exists y p(x, y)$$

$$4[2] \quad 0\forall x p(x, Y)$$

$$5[3] \quad 1\exists y p(X, y)$$

$$6[4] \quad 0p(f(Y), Y)$$

$$7[5] \quad 1p(X, g(X))$$

$p(f(Y), Y)$ und $p(X, g(X))$ sind nicht unifizierbar
es müßte gelten

$$\sigma(X) = \sigma(f(Y)) \text{ und } \sigma(Y) = \sigma(g(X))$$

$$\text{also } \sigma(X) = f(g(\sigma(X)))$$

Beweisaufgabe: $p(0) \wedge \forall x(p(x) \rightarrow p(s(x))) \models p(s(s(0)))$

$$\begin{array}{c}
 1p(0) \\
 \vdots \\
 1\forall x(p(x) \rightarrow p(s(x))) \\
 \vdots \\
 0p(s(s(0))) \\
 \vdots \\
 1p(X) \rightarrow p(s(X)) \\
 \vdots \\
 0p(X) \quad 0p(s(X)) \quad 1p(s(0)) \\
 \vdots \\
 \sigma(X) = 0 \quad 1p^*(Y) \rightarrow p(s(Y)) \\
 \vdots \\
 0p(Y) \quad 0p(s(Y)) \quad 1p(s(s(0))) \\
 \vdots \\
 \sigma(Y) = s(0) \quad * \quad *
 \end{array}$$

Korrektheit und Vollständigkeit des Tableaukalküls

Theorem

Sei M eine Formelmenge, sei A eine Formel

A ist eine logische Folgerung aus M
genau dann, wenn
es einen Tableaubeweis für A über M gibt

In Symbolen:

$$M \models A \Leftrightarrow M \vdash_T A$$

Definition: erfüllbares Tableau

Es seien $A \in For_{\Sigma}$, $M \subseteq For_{\Sigma}$.

Ein Tableau T für A über M heißt *M-erfüllbar* wenn es eine Interpretation $\mathcal{D}$ über $\bar{\Sigma}$ gibt, mit

- ▶ $\mathcal{D}$ ist Modell von M
- ▶ zu jeder Variablenbelegung β gibt es einen Pfad π in T mit $val_{\mathcal{D},\beta}(V) = W$ für alle V auf π .

Dabei ist $\bar{\Sigma} = \Sigma \cup \{f \mid f \text{ neues Funktionssymbol in } T\}$.

Theorem

*Sei $A \in \text{For}_\Sigma$, $M \subseteq \text{For}_\Sigma$, alle ohne freie Variablen
Wenn es ein geschlossenes Tableau für A über M gibt,
dann ist $M \models A$.*

Beweisplan:

T_0	Anfangstableau (über $0A$)	nicht M -erfüllbar	$\stackrel{(L2)}{\Rightarrow} M \models A$
$\vdots$			
T_k	Zwischentableau	nicht M -erfüllbar	(L3)
T_{k+1}	Zwischentableau	nicht M -erfüllbar	
$\vdots$			
T_n	geschlossenes Tableau	nicht M -erfüllbar	(L1)

Sei $A \in \text{For}_\Sigma$, $M \subseteq \text{For}_\Sigma$, alle ohne freie Variablen

Lemma: Endtableau (L1)

Jedes geschlossene Tableau für A über M ist unerfüllbar.

Lemma: Anfangstableau (L2)

Ist das Anfangstableau für A über M nicht M -erfüllbar,
so gilt $M \models A$.

Korrektheitslemma (L3)

M sei eine Formelmenge ohne freie Variablen.

Das Tableau T_1 über M gehe aus T über M durch Anwendung einer Tableauregel hervor.

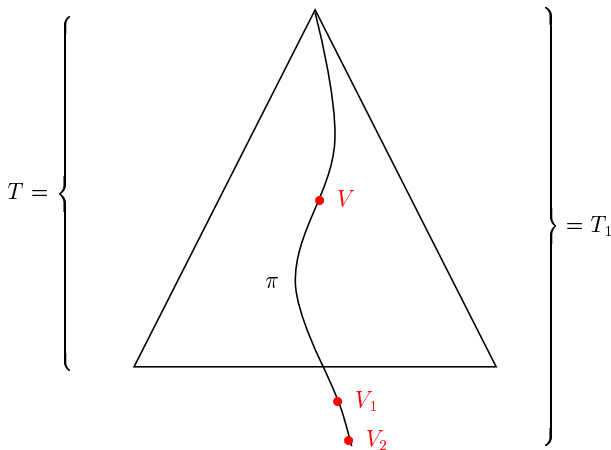
Ist T M -erfüllbar, dann ist auch T_1 M -erfüllbar.

Regelanwendung erhält die Erfüllbarkeit

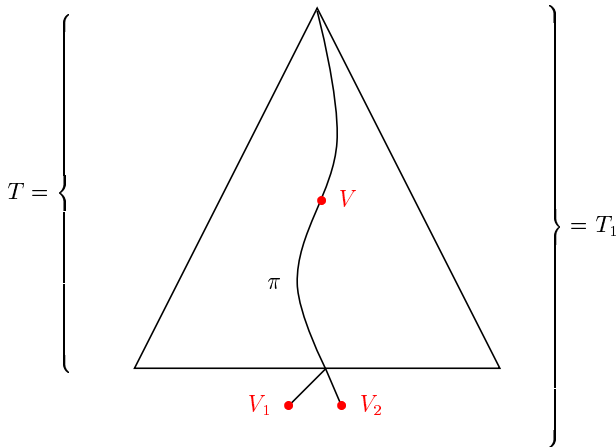
Kontraposition zu:

Ist T_1 nicht M -erfüllbar, so ist T auch nicht M -erfüllbar.

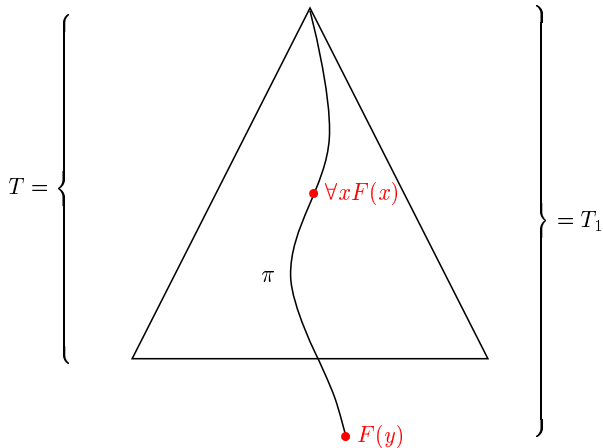
Beweis des Korrektheitslemma, α -Fall



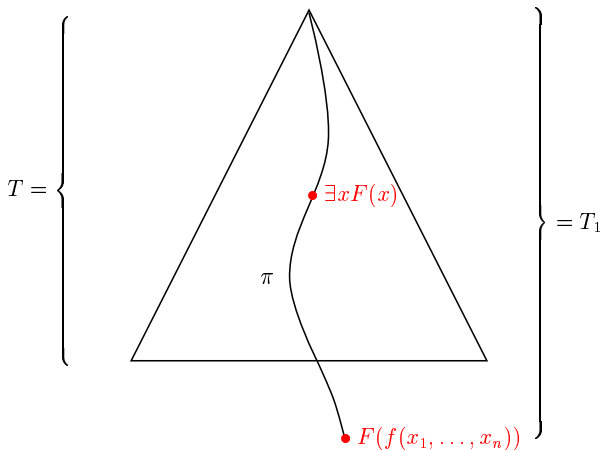
Beweis des Korrektheitslemma, β -Fall



Beweis des Korrektheitslemma, γ -Fall



Beweis des Korrektheitslemma, δ -Fall



Nach Voraussetzung sei $\mathcal{D}$ Modell von T über M .

Wir konstruieren eine Interpretation $\mathcal{D}' = (D, I')$, die sich von $\mathcal{D}$ nur darin unterscheidet, daß dem Funktionszeichen f eine Interpretation $I'(f)$ zugeordnet wird.

$$I'(f)(d_1, \dots, d_n) = ?$$

Für $d_1, \dots, d_n \in D$ und β mit $\beta(x_i) = d_i$ für $i = 1, \dots, n$ gilt entweder

$$(\mathcal{D}, \beta) \models \exists x F$$

in diesem Fall gibt es ein $d \in D$ mit

$$(\mathcal{D}, \beta_x^d) \models F(x)$$

oder $(\mathcal{D}, \beta) \models \exists x F$ gilt nicht. Im letzten Fall wählen wir einen beliebigen Wert $d \in D$.

Beweis des Korrektheitslemma, δ -Fall

(Forts.)

Wir wollen zeigen, daß $\mathcal{D}'$ Modell von T_1 ist.

Es sei β eine beliebige Belegung bzgl. $\mathcal{D}'$, β ist auch Belegung bzgl. $\mathcal{D}$, da sich der Grundbereich nicht geändert hat.

Es gibt π_0 in T mit $(\mathcal{D}, \beta) \models \pi_0$.

Nur der Fall $\pi_0 = \pi$ ist interessant.

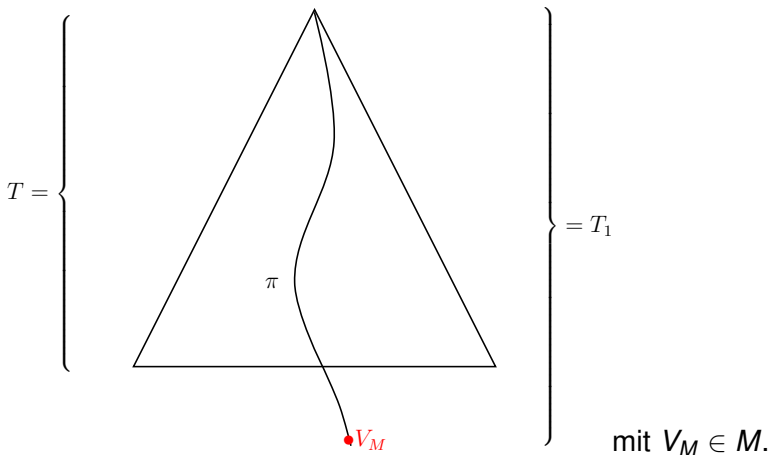
Aus $(\mathcal{D}, \beta) \models \exists x F(x)$ folgt nach Konstruktion von $\mathcal{D}'$ auch

$$(\mathcal{D}', \beta) \models F(f(x_1, \dots, x_n))$$

Da in den restlichen Formeln des Pfades π und in M das Zeichen f nicht vorkommt, erhalten wir insgesamt

$$(\mathcal{D}', \beta) \models \pi \cup \{F(f(x_1, \dots, x_n))\} \text{ und } (\mathcal{D}', \beta) \models M.$$

Beweis des Korrektheitlemmas, Voraussetzungsregel



Wir betrachten M -Erfüllbarkeit, also ist V_M offensichtlich erfüllt.

Theorem

Sei A eine Formel und M eine Menge von Formeln jeweils ohne freie Variablen.

Gilt
$$M \models A$$

dann gibt es ein geschlossenes Tableau für A über M .

Konstruktionsvorschrift

Es sei $t_1, \dots, t_n, \dots$ eine Aufzählung aller Grundterme.

Parallel zur Konstruktion einer Folge von Tableaus $\mathcal{T}_i$ wird eine Folge von Grundsubstitutionen σ_i erzeugt.

Entsteht $\mathcal{T}_{i+1}$ aus $\mathcal{T}_i$ durch Anwendung einer γ -Regel mit der Formel F auf dem Pfad π dann ist

$$\sigma_{i+1} = \{X/t_n\} \circ \sigma_i,$$

wobei X die neu eingeführte Variable ist und es sich um die n -te Anwendung der γ -Regel für F auf π handelt.

Sonst $\sigma_{i+1} = \sigma_i$.

Ein Pfad π im Tableau $\mathcal{T}_i$ wird nicht erweitert, wenn $\sigma_i(\pi)$ abgeschlossen ist.

Vollständigkeit des Tableaukalküls

Konstruktive Version

Theorem

Sei A eine Formel und M eine Menge von Formeln jeweils ohne freie Variablen.

Gilt $M \models A$

dann terminiert jedes

- ▶ *faire Verfahren,*
- ▶ *das mit $0A$ und $\sigma_0 = id$ beginnt,*
- ▶ *und die Konstruktionsvorschrift einhält*

nach endlich vielen Schritten in einem geschlossenen Tableau.

Fairness bedeutet, dass auf jedem Pfad, jede mögliche Regelanwendung auch schließlich stattfindet.

Insbesondere wird auf jedem offenen Pfad jede γ -Formel unbeschränkt oft benutzt und jede Formel aus M kommt dran.

Beweisansatz

Details später

Angenommen die fair konstruierte Folge $(\mathcal{T}_0, \sigma_0), \dots, (\mathcal{T}_n, \sigma_n) \dots$ terminiert nicht.

Setze $\mathcal{T} = \bigcup_{i \geq 0} \mathcal{T}_i$ und $\sigma = \bigcup_{i \geq 0} \sigma_i$.

$\sigma(\mathcal{T})$ ist ein unendlicher endlich verzweigender Baum.

Nach Königs Lemma gibt es einen unendlichen Pfad π in $\sigma(\mathcal{T})$.

Nach Konstruktion muss π ein offener Pfad sein.

Aus π kann man ein (Herbrand-)Modell $\mathcal{D}$ ablesen
mit $\mathcal{D} \models M$ und $\mathcal{D} \models \neg A$.

Widerspruch zu $M \models A$.

Königs Lemma

In jedem unendlichen, endlich verzweigenden Baum existiert ein unendlicher Pfad.

Definition

Eine Menge H geschlossener Vorzeichenformeln über einer Signatur Σ heißt eine **Hintikka-Menge**, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

- (H 1) Gilt für eine α -Formel F , $F \in H$,
dann auch $F_1 \in H$ und $F_2 \in H$.
- (H 2) Gilt $F \in H$ für eine β -Formel F ,
dann auch $F_1 \in H$ oder $F_2 \in H$.
- (H 3) Gilt $F \in H$ für eine δ -Formel F ,
dann gibt es einen Grundterm t mit $F_1(t) \in H$.
- (H 4) Gilt $F \in H$ für eine γ -Formel F ,
dann gilt $F_1(t) \in H$ für jeden Grundterm t .
- (H 5) Für keine A kommen $1A$ und $0A$ in H vor.

Modellexistenz

- ▶ Jede Hintikka-Menge besitzt ein Herbrand-Modell.
- ▶ Jeder offene Ast in einem fairen, abgeschlossenen Tableau ist eine Hintikka-Menge.

Theorem

Die folgenden Probleme sind unentscheidbar:

- 1. Was ist die maximale Anzahl von γ -Regelanwendungen in einem Tableaubeweis einer prädikatenlogische Formel $F \in \text{For}_\Sigma$?*
- 2. Ist eine prädikatenlogische Formel $F \in \text{For}_\Sigma$ allgemeingültig?
Triviale Signaturen Σ ausgenommen.*

Rekursionstheoretische Eigenschaften der Prädikatenlogik

Theorem

1. *Die Menge der allgemeingültigen Formeln der Prädikatenlogik ist rekursiv aufzählbar.*
2. *Die Menge der erfüllbaren Formeln der Prädikatenlogik ist **nicht** rekursiv aufzählbar.*

ϕ		
$\psi_{1,1}$	$\dots$	$\psi_{n,1}$
$\vdots$	$\dots$	$\vdots$
$\vdots$	$\dots$	$\vdots$
ψ_{1,k_1}	$\dots$	ψ_{n,k_n}

Um die Teilformeleigenschaft des Tableaukalküls zu gewährleisten, wird gefordert, dass alle Vorzeichenformeln $\psi_{i,j}$ Teilformeln der Vorzeichenformel ϕ sind.

Korrektheit und Vollständigkeit einer Regel

Eine allgemeine Tableauregel

ϕ		
$\psi_{1,1}$	$\dots$	$\psi_{n,1}$
$\vdots$	$\dots$	$\vdots$
$\vdots$	$\dots$	$\vdots$
ψ_{1,k_1}	$\dots$	ψ_{n,k_n}

heißt vollständig und korrekt, wenn für jede Interpretation I gilt
 $val_I(\phi) = W$ gdw es gibt ein i , $1 \leq i \leq n$, so dass
für alle j , $1 \leq j \leq k_i$ gilt $val_I(\psi_{i,j}) = W$

Tableauregel für den logischen Äquivalenzoperator

$\leftrightarrow$	W	F
W	W	F
F	F	W

$1(A \leftrightarrow B)$		$0(A \leftrightarrow B)$	
$1A$	$0A$	$1A$	$0A$
$1B$	$0B$	$0B$	$1B$