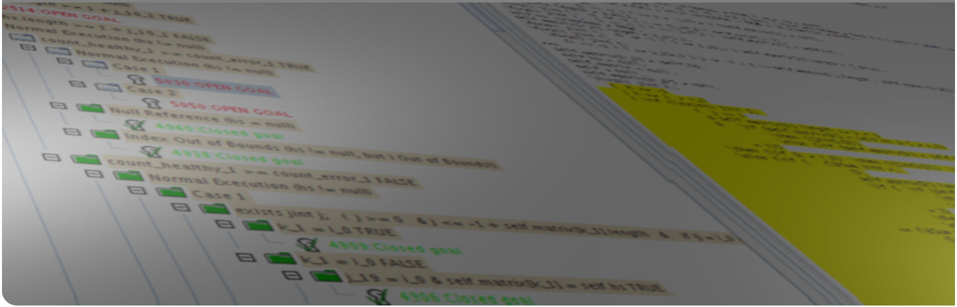
Karlsruhe Institute of Technology

Formale Systeme

Prof. Dr. Bernhard Beckert, WS 2017/2018

Prädikatenlogik: Tableaukalkül (ohne Gleichheit)

KIT – INSTITUT FÜR THEORETISCHE INFORMATIK



Tableaukalkül

Uniforme Notation

Typ α:

F	F_1	F_2
$1\neg A$	$0A$	–
$0\neg A$	$1A$	–
$1A \wedge B$	$1A$	$1B$
$0A \vee B$	$0A$	$0B$
$0A \rightarrow B$	$1A$	$0B$

Typ β

F	F_1	F_2
$0A \wedge B$	$0A$	$0B$
$1A \vee B$	$1A$	$1B$
$1A \rightarrow B$	$0A$	$1B$

Typ γ:

F	F_1
$1\forall x A(x)$	$1A(x)$
$0\exists x A(x)$	$0A(x)$

Typ δ:

F	F_1
$1\exists x A(x)$	$1A(x)$
$0\forall x A(x)$	$0A(x)$

Zusammenfassung der Tableauregeln

α-Regel	$\dfrac{F}{\begin{array}{c}F_1\\F_2\end{array}}$	für α-Formeln *F*
β-Regel	$\dfrac{F}{F_1 \mid F_2}$	für β-Formeln *F*
γ-Regel	$\dfrac{F}{F_1(y)}$	für γ-Formeln *F* und eine neue Variable *y*
δ-Regel	$\dfrac{F}{F_1(f(x_1, \ldots, x_n))}$	für δ-Formeln *F*, wobei $x_1, \ldots, x_n$ alle freien Variablen in *F* sind und *f* ein neues *n*-stelliges Funktionssymbol

Zusammenfassung der Tableauregeln

(Forts.)

Anfangsregel	$\dfrac{}{0A}$	für die zu beweisende Formel A A ohne freie Variable
V-Regel	$\dfrac{}{1B}$	für jedes $B \in M$, B ohne freie Variablen

Geschlossene Tableaus

Sei T ein Tableau, π ein Pfad in T und σ eine Substitution.

Definition

σ *schließt* π, wenn es

- Formeln B, C gibt, so daß $\sigma(B) = \sigma(C)$, σ kollisionsfrei für B und C ist und $1B, 0C$ auf π liegen oder
- eine der Formeln 0**1** oder 1**0** liegt auf π.

σ *schließt* ein Tableau T , wenn σ alle seine Pfade schließt .

Abschlußregel

Die Abschlußregel oder C-Regel:

Aus einem Tableau T erzeuge ein Tableau T_1
durch Wahl eines Pfades π und einer Substitution σ, die π schließt, und
Anwendung von σ auf das ganze Tableau T.

Ein einfaches Beispiel

$$
\begin{array}{cl}
0\ \forall x\ p(x) \rightarrow \exists y\ p(y) & \text{(Start)} \\
| & \\
1\ \forall x\ p(x) & (\alpha\text{-Regel}) \\
| & \\
0\ \exists y\ p(y) & (\alpha\text{-Regel}) \\
| & \\
1\ p(X) & (\gamma\text{-Regel}) \\
| & \\
0\ p(Y) & (\gamma\text{-Regel})
\end{array}
$$

Aus der zu beweisenden Aussage entsteht durch Anwendung der α- und γ-Regel das linke Tableau.

Ein einfaches Beispiel

$$
\begin{array}{cl}
0\ \forall x\ p(x) \rightarrow \exists y\ p(y) & \text{(Start)} \\
| & \\
1\ \forall x\ p(x) & (\alpha\text{-Regel}) \\
| & \\
0\ \exists y\ p(y) & (\alpha\text{-Regel}) \\
| & \\
1\ p(X) & (\gamma\text{-Regel}) \\
| & \\
0\ p(Y) & (\gamma\text{-Regel})
\end{array}
\quad
\underset{\{Y/X\}}{\overset{\text{C-Regel}}{\Longrightarrow}}
\quad
\begin{array}{c}
0\ \forall x\ p(x) \rightarrow \exists y\ p(y) \\
| \\
1\ \forall x\ p(x) \\
| \\
0\ \exists y\ p(y) \\
| \\
1\ p(X) \\
| \\
0\ p(X)
\end{array}
$$

Aus der zu beweisenden Aussage entsteht durch Anwendung der α- und γ-Regel das linke Tableau, daraus dann das rechts stehende durch Anwendung der C-Regel.

Ein geschlossenes Tableau

1[]	$0\exists y \forall x p(x, y) \rightarrow \forall x \exists y p(x, y)$
2[1]	$1\exists y \forall x p(x, y)$
3[1]	$0\forall x \exists y p(x, y)$
4[2]	$1\forall x p(x, a)$
5[3]	$0\exists y p(b, y)$
6[4]	$1p(X, a)$
7[5]	$0p(b, Y)$
	geschlossen mit $\sigma(X) = b$ und $\sigma(Y) = a$

Ein offenes Tableau

1[]	$0\forall x \exists y p(x,y) \rightarrow \exists y \forall x p(x,y)$
2[1]	$0\exists y \forall x p(x,y)$
3[1]	$1\forall x \exists y p(x,y)$
4[2]	$0\forall x p(x,Y)$
5[3]	$1\exists y p(X,y)$
6[4]	$0p(f(Y),Y)$
7[5]	$1p(X,g(X))$

$p(f(Y),Y)$ und $p(X,g(X))$ sind nicht unifizierbar
es müßte gelten

$\sigma(X) = \sigma(f(Y))$ und $\sigma(Y) = \sigma(g(X))$

also $\sigma(X) = f(g(\sigma(X)))$

Mehrfache Anwendung der γ-Regel

Beweisaufgabe: $p(0) \land \forall x(p(x) \to p(s(x))) \models p(s(s(0)))$
Tableaubeweis:

$1[]\quad 1p(0)$
$2[]\quad 1\forall x(p(x) \to p(s(x)))$
$3[]\quad 0p(s(s(0)))$

$4[2]\quad 1p(X) \to p(s(X))$

$5[4]\quad 0p(X)$		$6[4]\quad 1p(s(X))$
$\sigma_1(X) = 0$		
$5a\quad 0p(0)$		$6a\quad 1p(s(0))$
		$7[2]\quad 1p(Y) \to p(s(Y))$
	$8[7]\quad 0p(Y)$	$9[7]\quad 1p(s(Y))$
	$\sigma_2(Y) = s(0)$	
	$8a\quad 0p(s(0))$	$9a\quad 1p(s(s(0)))$

Korrektheit

und

Vollständigkeit

Modellbegriff für Tableaus

Definition

Es seien $A \in For_\Sigma$, $M \subseteq For_\Sigma$,
T ein Tableau für A über M und
$\mathcal{D}$ eine Interpretation über $\overline{\Sigma}$,
wobei $\overline{\Sigma} = \Sigma \cup \{f \mid f$ neues Funktionssymbol in $T\}$.
$\mathcal{D}$ heißt **Modell von T über M** gdw. gilt

- $\mathcal{D}$ ist Modell von M
- zu jeder Variablenbelegung β gibt es einen Pfad π in T mit $val_{\mathcal{D},\beta}(V) = W$ für alle V auf π.

Korrektheitslemma

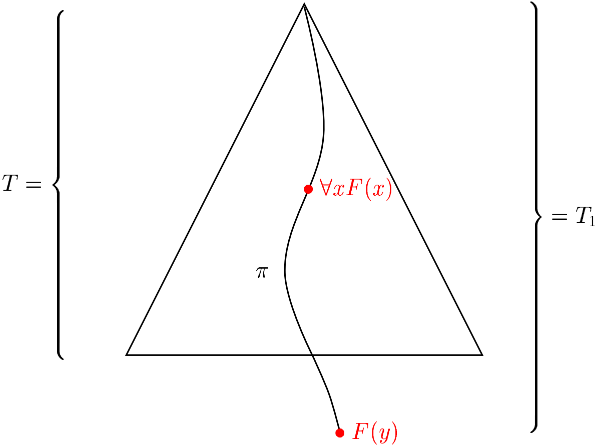
1. Teil

Theorem

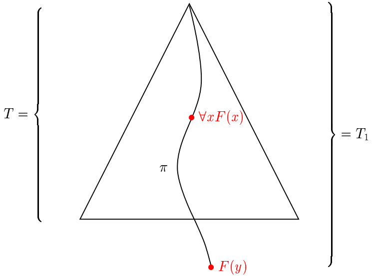
M sei eine Formelmenge.
Das Tableau T' über M gehe aus T über M durch Anwendung einer Tableauregel hervor.

Hat T ein Modell über M, dann auch T'.

Beweis des Korrektheitslemma, γ-Fall

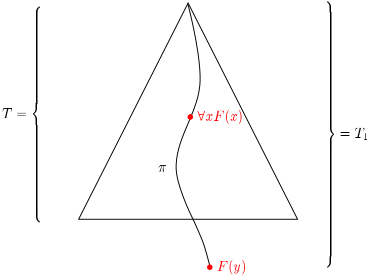


Beweis des Korrektheitslemma, γ-Fall



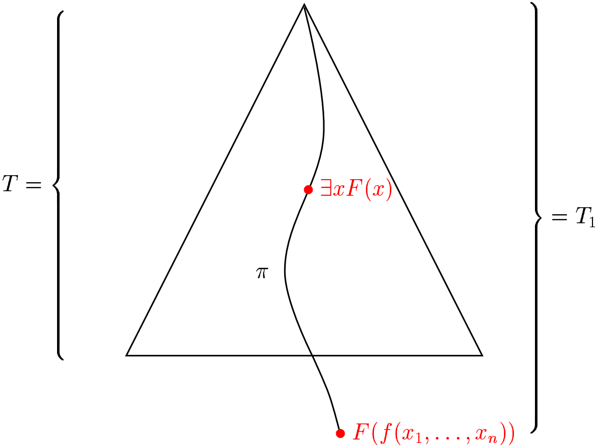
$\mathcal{D}$ sei ein Modell von *T* über *M*. Wir zeigen, daß $\mathcal{D}$ auch Modell von T_1 ist.
Sei β eine Belegung und π_0 ein Pfad in *T* mit $(\mathcal{D}, \beta) \models \pi_0$.
Wenn $\pi_0 \neq \pi$, ist π_0 unverändert ein Pfad in T_1, fertig.

Beweis des Korrektheitslemma, γ-Fall



$\mathcal{D}$ sei ein Modell von T über M. Wir zeigen, daß $\mathcal{D}$ auch Modell von T_1 ist.
Sei β eine Belegung und $(\mathcal{D}, \beta) \models \pi$, i.e. $\pi_0 = \pi$.
Aus $(\mathcal{D}, \beta) \models \forall x F$ folgt insbesondere $(\mathcal{D}, \beta) \models F(y)$, also $(\mathcal{D}, \beta) \models \pi \cup \{F(y)\}$.

Beweis des Korrektheitslemma, δ-Fall



Beweis des Korrektheitslemma, δ-Fall

Nach Voraussetzung sei $\mathcal{D}$ Modell von T über M.

Wir konstruieren eine Interpretation $\mathcal{D}'$, die sich von $\mathcal{D}$ nur darin unterscheidet, daß dem Funktionszeichen f eine Interpretation $f^{\mathcal{D}'}$ zugeordnet wird.

$$f^{\mathcal{D}'}(d_1, \ldots, d_n) = d?$$

Für $d_1, \ldots, d_n \in D$ und β mit $\beta(x_i) = d_i$ für $i = 1, \ldots, n$ gilt entweder

$$(\mathcal{D}, \beta) \models \exists x F$$

in diesem Fall gibt es ein $d \in D$ mit

$$(\mathcal{D}, \beta_x^d) \models F(x)$$

oder $(\mathcal{D}, \beta) \models \exists x F$ gilt nicht. Im letzten Fall wählen wir einen beliebigen Wert $d \in D$.

Beweis des Korrektheitslemma, δ-Fall

(Forts.)

Wir wollen zeigen, daß $\mathcal{D}'$ Modell von T' ist.

Es sei β eine beliebige Belegung bzgl. $\mathcal{D}'$, β ist auch Belegung bzgl. $\mathcal{D}$, da sich der Grundbereich nicht geändert hat.

Es gibt π_0 in T mit $(\mathcal{D}, \beta) \models \pi_0$.

Nur der Fall $\pi_0 = \pi$ ist interessant.
Aus $(\mathcal{D}, \beta) \models \exists x F(x_1, \ldots, x_n)$ folgt nach Konstruktion von $\mathcal{D}'$ auch

$$(\mathcal{D}', \beta) \models F(f(x_1, \ldots, x_n))$$

.
Da in den restlichen Formeln des Pfades π und in M das Zeichen f nicht vorkommt, erhalten wir insgesamt

$$(\mathcal{D}', \beta) \models \pi \cup \{F(f(x_1, \ldots, x_n))\} \text{ und } (\mathcal{D}', \beta) \models M.$$

Korrektheitslemma

2. Teil

Theorem

- *Ist $\mathcal{D}$ Modell von T über M*
- *und ensteht T' aus T durch Schließen eines Pfades,*
- *dann ist $\mathcal{D}$ auch Modell von T'.*

Beweis des Korrektheitslemma

2. Teil

Voraussetzung: zu jeder Belegung β gibt es einen Pfad π in T mit $(\mathcal{D}, \beta) \models \pi$.

T' entstehe durch Anwenden der Substitution σ und Schließen eines Pfades gemäß einer der beiden Möglichkeiten in der Definition. Sei β' eine beliebige Belegung.

Zu $\beta(y) = val_{\beta'}(\sigma(y))$ gibt es einen Pfad π mit $(\mathcal{D}, \beta) \models \pi$.

Nach dem Substitutionslemma gilt für alle C

$$(\mathcal{D}, \beta) \models C \text{ gdw. } (\mathcal{D}, \beta') \models \sigma(C)$$

also:

$$(\mathcal{D}, \beta') \models \sigma(\pi)$$

Anfangstableau

Sei $A \in For_\Sigma, M \subseteq For_\Sigma$, alle ohne freie Variablen.
Das Anfangstableau T_0 für diese Beweisaufgabe besteht aus einem einzigen Pfad auf dem genau die folgenden Formeln liegen

- $0A$
- $1B$ für alle $B \in M$

Beobachtungen

- T_0 für A über M ist unerfüllbar genau dann wenn, $M \models A$.
- ein geschlossenes Tableau ist unerfüllbar

Korrektheitssatz des Tableaukalküls

Theorem

Sei $A \in For_\Sigma, M \subseteq For_\Sigma$, alle ohne freie Variablen
Wenn es ein geschlossenes Tableau für A über M gibt, dann ist $M \models A$.

Beweis:

T_0	Anfangstableau	nicht erfüllbar	
$\vdots$			
T_k	Zwischentableau	nicht erfüllbar	Korrektheitslemma
T_{k+1}	Zwischentableau	nicht erfüllbar	
$\vdots$			
T_n	geschlossenes Tableau	nicht erfüllbar	

Ein offenes Tableau

Vorbereitung auf den Vollständigkeitsbeweis

1[]	$0\forall x \exists y p(x, y) \rightarrow \exists y \forall x p(x, y)$
2[1]	$0\exists y \forall x p(x, y)$
3[1]	$1\forall x \exists y p(x, y)$
4[2]	$0\forall x p(x, Y)$
5[3]	$1\exists y p(X, y)$
6[4]	$0p(f(Y), Y)$
7[5]	$1p(X, g(X))$
	offener Pfad π

Noch nicht (abschließend) behandelte Formeln

Modell $\mathcal{D}$ für alle Formeln in π:

$$\begin{array}{lcl}
D & = & \{a, b\} \\
f^{\mathcal{D}}(x) & = & \begin{cases} b & \text{falls } x = a \\ a & \text{falls } x = b \end{cases} \\
g^{\mathcal{D}}(x) & = & x \\
p^{\mathcal{D}}(x, y) & \Leftrightarrow & x = y
\end{array}$$

Ein offenes Tableau

Vorbereitung auf den Vollständigkeitsbeweis

1[]	$0\forall x \exists y p(x,y) \rightarrow \exists y \forall x p(x,y)$
2[1]	$0\exists y \forall x p(x,y)$
3[1]	$1\forall x \exists y p(x,y)$
4[2]	$0\forall x p(x,Y)$
5[3]	$1\exists y p(X,y)$
6[4]	$0p(f(Y),Y)$
7[5]	$1p(X,g(X))$
8[2]	$0\forall x p(x,V)$
9[3]	$1\exists y p(U,y)$
10[8]	$0p(f'(V),V)$
11[9]	$1p(U,g'(U))$
	offener Pfad π

Noch nicht (abschließend) behandelte Formeln

Hintikka-Menge

Definition

Eine Menge H geschlossenener Vorzeichenformeln über einer Signatur Σ heißt eine **Hintikka-Menge**, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

(H 1) Gilt für eine α-Formel F, $F \in H$,
dann auch $F_1 \in H$ und $F_2 \in H$.

(H 2) Gilt $F \in H$ für eine β-Formel F,
dann auch $F_1 \in H$ oder $F_2 \in H$.

(H 3) Gilt $F \in H$ für eine δ-Formel F,
dann gibt es einen Grundterm t mit $F_1(t) \in H$.

(H 4) Gilt $F \in H$ für eine γ-Formel F,
dann gilt $F_1(t) \in H$ für jeden Grundterm t.

(H 5) Für keine A kommen $1A$ und $0A$ in H vor.

Modell-Lemma

Theorem

Jede Hintikka-Menge H besitzt ein Modell.

Beweis:
Wir setzen

$$D = \{t : t \text{ ein Grundterm}\}$$

Die Interpretationsfunktion I wird definiert durch

$$I(f)(t_1, \ldots, t_n) \quad = \quad f(t_1, \ldots, t_n)$$

$$(t_1, \ldots, t_n) \in I(p) \quad \Leftrightarrow \quad 1p(t_1, \ldots, t_n) \in H$$

Beweis des Modell-Lemmas (Forts. 1)

Mit der obigen Definition gilt für jeden Grundterm:

$$I(t) = t$$

Wir beweisen diese Behauptung durch Induktion über den Termaufbau.
Für $t = c$, ein Konstantensymbol, gilt nach Definition

$$I(c) = c.$$

Sei jetzt $t = f(t_1, \ldots, t_n)$:

$$\begin{array}{lcll} I(t) & = & I(f)(t_1^{\mathcal{D}}, \ldots, t_n^{\mathcal{D}}) & \text{(Def. von } I(t)\text{)} \\ & = & I(f)(t_1, \ldots, t_n) & \text{(Ind.Vor.)} \\ & = & f(t_1, \ldots, t_n) & \text{(Def. von } I(f)\text{)} \end{array}$$

Beweis des Modell-Lemmas (Forts. 2)

Es bleibt, um den Beweis des Modell-Lemmas zu vervollständigen, noch nachzuweisen, daß für jede Formel $F \in H$ gilt

$$(D, I) \models F.$$

Dieser Nachweis wird wieder durch Induktion über den Aufbau von F geführt.
(Man beachte, daß H nur geschlossene Formeln enthält.)

1. Fall: $F = 1p(t_1, \ldots, t_n)$
   Falls $F \in H$, dann gilt $\mathcal{D} \models F$ nach Definition von $\mathcal{D}$.
2. Fall: $F = 0p(t_1, \ldots, t_n)$.
   Wenn $F \in H$, dann gilt wegen (H 6) $1p(t_1, \ldots, t_n) \notin H$. Nach Definition von (D, I) also $(D, I) \not\models p(t_1, \ldots, t_n)$, d. h. $(D, I) \models \neg p(t_1, \ldots, t_n)$

Die weiteren Induktionsschritte sind jetzt einfache Konsequenzen aus (H 1) bis (H 4).

Konstruktionsvorschrift

Es sei $t_1, \ldots, t_n, \ldots$ eine Aufzählung aller Grundterme.

Parallel zur Konstruktion einer Folge von Tableaus $\mathcal{T}_i$ wird eine Folge von Grundsubstitutionen σ_i erzeugt.

Entsteht $\mathcal{T}_{i+1}$ aus $\mathcal{T}_i$ durch Anwendung einer γ-Regel mit der Formel F auf dem Pfad π dann ist

$$\sigma_{i+1} = \{X/t_n\} \circ \sigma_i,$$

wobei X die neu eingeführte Variable ist und
es sich um die n-te Anwendung der γ-Regel für F auf π handelt.

Sonst $\sigma_{i+1} = \sigma_i$.

Ein Pfad π im Tableau $\mathcal{T}_i$ wird nicht erweitert, wenn $\sigma_i(\pi)$ abgeschlossen ist.

Vollständigkeit des Tableaukalküls

Theorem

Sei A eine Formel und M eine Menge von Formeln jeweils ohne freie Variablen.

Gilt $$M \models A$$
dann terminiert jedes

- *faire Verfahren,*
- *das mit $0A$ und $\sigma_0 = id$ beginnt,*
- *und die Konstruktionsvorschrift einhält*

nach endlich vielen Schritten in einem geschlossenen Tableau.

Fairness bedeutet, daß auf jedem Pfad, jede mögliche Regelanwendung auch schließlich stattfindet.
Insbesondere wird auf jedem offenen Pfad jede γ-Formel unbeschränkt oft benutzt.
und jede Formel aus M kommt einmal dran.

Königs Lemma

In jedem unendlichen, endlich verzweigenden Baum existiert ein unendlicher Pfad.

Beweisansatz

Angenommen die fair konstruierte Folge $(\mathcal{T}_0, \sigma_0), \ldots, (\mathcal{T}_n, \sigma_n) \ldots$ terminiert nicht.

Wir wollen eine Modell $\mathcal{D}$ finden mit $\mathcal{D} \models M$ und $\mathcal{D} \models \neg A$

Setze $\mathcal{T} = \bigcup_{i \geq 0} \mathcal{T}_i$ und $\sigma = \bigcup_{i \geq 0} \sigma_i$.

$\sigma(\mathcal{T})$ ist ein unendlicher endlich verzweigender Baum.

Nach Königs Lemma gibt es einen unendlichen Pfad π in $\sigma(\mathcal{T})$.

Noch Konstruktion muß π ein offener Pfad sein.

$H = \pi$ ist eine Hintikka- Menge.

Hintikka-Menge

Wiederholung

Definition

Eine Menge H geschlossenener Vorzeichenformeln über einer Signatur Σ heißt eine **Hintikka-Menge**, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

- (H 1) Gilt für eine α-Formel F, $F \in H$, dann auch $F_1 \in H$ und $F_2 \in H$.
- (H 2) Gilt $F \in H$ für eine β-Formel F, dann auch $F_1 \in H$ oder $F_2 \in H$.
- (H 3) Gilt $F \in H$ für eine δ-Formel F, dann gibt es einen Grundterm t mit $F_1(t) \in H$.
- (H 4) Gilt $F \in H$ für eine γ-Formel F, dann gilt $F_1(t) \in H$ für jeden Grundterm t.
- (H 5) Für keine A kommen $1A$ und $0A$ in H vor.

Unentscheidbarkeit der Prädikatenlogik

Theorem

Die folgenden Probleme sind unentscheidbar:

1. *Ist eine prädikatenlogische Formel $F \in For_\Sigma$ allgemeingültig?*
   Triviale Signaturen Σ ausgenommen.
2. *Was ist die maximale Anzahl von γ-Regelanwendungen in einem Tableaubeweis einer prädikatenlogische Formel $F \in For_\Sigma$?*

Rekursionstheoretische Eigenschaften der Prädikatenlogik

Theorem

1. *Die Menge der allgemeingültigen Formeln der Prädikatenlogik ist rekursiv aufzählbar.*
2. *Die Menge der erfüllbaren Formeln der Prädikatenlogik ist* nicht *rekursiv aufzählbar.*