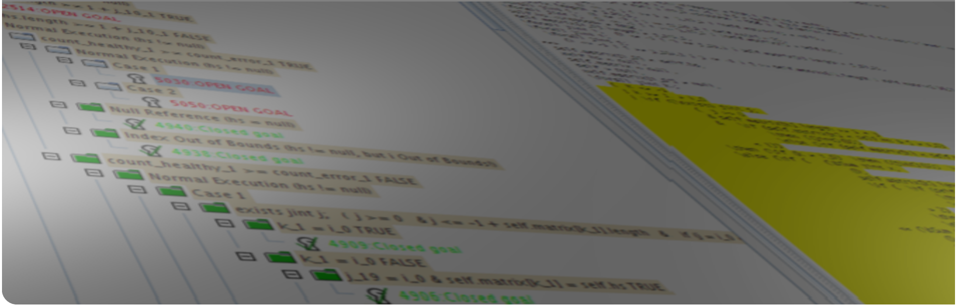
Karlsruhe Institute of Technology

Formale Systeme

Prof. Dr. Bernhard Beckert, WS 2017/2018

Termersetzungssysteme

KIT – Institut für Theoretische Informatik



Termersetzungssysteme

Definition

Termersetzungssysteme sind spezielle Reduktionssysteme.
Ist E eine endliche Menge von Gleichungen über der Signatur Σ, dann nennen wir das Reduktionssystem

$$(Term_{\Sigma}, \stackrel{1}{\rightarrow}_E)$$

ein *Termersetzungssystem*.
Da dieses durch Σ und E eindeutig bestimmt ist, sprechen wir kürzer vom *Termersetzungssystem* (Σ, E).

Kanonisches Termersetzungssysteme

Theorem

(Σ, E) *sei ein kanonisches Termersetzungssystem.*

1. *Zu jedem Term* t *gibt es genau einen irreduziblen Term* $irr(t)$ *mit* $t \rightarrow_E irr(t)$.
2. *Für beliebige Terme* s, t *gilt:*

$$E \models s \doteq t \Leftrightarrow irr(s) = irr(t).$$

3. *Die Gültigkeit einer Gleichung in der Theorie von* E *ist entscheidbar.*

Spezialfall des Satzes über kanonische Reduktionssysteme.

Ein einfaches kanonisches Termersetzungssystem

E_{GBT} :

$$\begin{array}{rclrcl} 0 \wedge x & = & 0 & 1 \wedge x & = & x \\ x \wedge 0 & = & 0 & x \wedge 1 & = & x \\ 0 \vee x & = & x & 1 \vee x & = & 1 \\ x \vee 0 & = & x & x \vee 1 & = & 1 \end{array}$$

Für jeden variablenfreien Booleschen Term t gilt

$$t \rightarrow_{E_{GBT}} 0$$

oder

$$t \rightarrow_{E_{GBT}} 1.$$

Kritisches Paare

Definition

Ein Paar (t_1, t_2) von Termen heißt *kritisches Paar* von (Σ, E), wenn existieren: Gleichungen $l_1 \doteq r_1$ und $l_2 \doteq r_2$, die Varianten von Gleichungen in E sind; ferner ein Term u und eine Substitution μ, so dass gilt:

- u ist Unterterm von l_1, u ist keine Variable
- u ist mit l_2 unifizierbar, und μ ist ein mgu(u, l_2)
- $t_1 = \mu(r_1)$ (nach der Gleichung $l_1 \doteq r_1$)
- t_2 entsteht aus $\mu(l_1)$, indem dort genau ein Vorkommen von $\mu(l_2)$ durch $\mu(r_2)$ ersetzt wird (nach der Gleichung $l_2 \doteq r_2$).

Der Term $\mu(l_1)$ heißt dabei eine *Überlagerung* von l_1 mit l_2.

Das zentrale Lemma

Theorem

Ein Termersetzungssystem (Σ, E) *ist*

lokal konfluent
genau dann, wenn
jedes kritische Paar (t_1, t_2) *konfluent ist*
d.h. ein t *existiert mit* $t_1 \to_E t$, $t_2 \to_E t$.

Lemma

Ein endliches Termersetzungsststem (Σ, E) besitzt bis auf Variantenbildung nur endlich viele kritische Paare, und diese lassen sich algorithmisch aus (Σ, E) erhalten.

Gruppentheorie E_G

$$\begin{array}{lllll} 1 & 0 + x & = & x \\ 2 & (x + y) + z & = & x + (y + z) \\ 3 & i(x) + x & = & 0 \end{array}$$

Ist E_G lokal konfluent?
Wir untersuchen die kritischen Paare.

Kritische Paare für E_G

1 in 2	$(0+u)+z$	$(0+(u+z)\ ,\ u+z)$
2 in 2	$((u+v)+w)+z$	$((u+v)+(w+z)\ ,\ (u+(v+w))+z)$
3 in 2	$(i(u)+u)+z$	$(i(u)+(u+z)\ ,\ 0+z)$

Beide Seiten von 1) reduzieren zu $u+z$.
Beide Seiten von 2) reduzieren zu $((u+v)+w)+z$.
Reduktion von 3) führt zu dem Paar

$$i(u)+(u+z) \quad z$$

Es gilt

$$E_G \models z \doteq i(u)+(u+z)$$

Setze $E_G^1 = E_G \cup \{z \doteq i(u)+(u+z)\}$.
Ist E_G^1 lokal konfluent?

Kritische Paare für E_G^1

1 in 4	$i(0) + (0 + u)$	$(i(0) + u\ ,\ u)$
2 in 4	$i(u + v) + ((u + v) + w)$	$(i(u + v) + (u + (v + w))\ ,\ w)$
3 in 4	$i(i(u)) + (i(u) + u)$	$(i(i(u)) + 0\ ,\ u)$
4 in 2	$(i(x) + (x + y)) + w$	$(i(x) + ((x + y) + w)\ ,\ y + w)$
4 in 4	$i(i(u)) + (i(u) + (u + v))$	$(i(i(u)) + v\ ,\ u + v)$

Reduktion der kritischen Paare ergibt:

$(i(0) + u\ ,\ u)$	$(i(0) + u\ ,\ u)$
$(i(u + v) + (u + (v + w))\ ,\ w)$	$(i(u + v) + (u + (v + w))\ ,\ w)$
$(i(i(u)) + 0\ ,\ u)$	$(i(i(u)) + 0\ ,\ u)$
$(i(x) + ((x + y) + w)\ ,\ y + w)$	$(y + w\ ,\ y + w)$
$(i(i(u)) + v\ ,\ u + v)$	$(i(i(u)) + v\ ,\ u + v)$

Nur das vorletzte Paar ist also konfluent.

E_G^2

E_G^2

$$\begin{array}{lll}
1 & 0 + x & = & x \\
2 & (x+y)+z & = & x+(y+z) \\
3 & i(x)+x & = & 0 \\
4 & i(x)+(x+y) & = & y \\
5 & i(0)+x & = & x \\
6 & i(x+y)+(x+(y+z)) & = & z \\
7 & i(i(x))+y & = & x+y
\end{array}$$

Neue Gleichungen in blau.

Kritische Paare für E_G^2

1 in 6	$(i(u) + (0 + (u + z))\ ,\ z)$
1 in 6	$(i(0 + y) + (y + z)\ ,\ z)$
3 in 5	$(0\ ,\ 0)$
3 in 6	$(i(i(y + z) + y) + 0\ ,\ z)$
3 in 7	$(x + i(x)\ ,\ 0)$
4 in 5	$(0 + v\ ,\ v)$
4 in 6	$(i(i(u) + u) + v\ ,\ v)$
4 in 7	$((x + (i(x) + v)\ ,\ v)$
5 in 2	$(i(0) + (x + v)\ ,\ x + v)$
5 in 4	$(i(i(0)) + x\ ,\ x)$
5 in 6	$(i(i(0) + y) + (y + z)\ ,\ z)$
6 in 2	$(i(x + y) + ((x + (y + z)) + w)\ ,\ z + w)$
6 in 6	$(i(i(u + v) + u) + w\ ,\ v + w)$
7 in 2	$(i(i(x)) + (y + z)\ ,\ (x + y) + z)$
7 in 3	$(x + i(x)\ ,\ 0)$
7 in 4	$(x + (i(x) + u)\ ,\ u)$
7 in 6	$(v + w\ ,\ v + w)$

E_G^3

Aus den nicht konfluenten kritischen Paare von E_G^2 ergeben sich die folgenden neuen Gleichungen:

$$\begin{aligned}
&i(i(y+z)+y)+0 = z\\
&x+i(x) = 0\\
&x+(i(x)+v) = v\\
&i(i(u+v)+u)+w = v+w
\end{aligned}$$

Beobachtung

Im Knuth-Bendix Verfahren können auch Gleichungen wieder wegfallen.
Unter den kritischen Paaren von E_G^3 kommt die Überlagerung

$$i(i(u+v)+u)+0$$

von $i(i(y+z)+y)+0=z$ und $i(i(u+v)+u)+w=v+w$ vor, die zu dem nicht konfluenten kritischen Paar führt: $(v+0\ ,\ v)$.

Nimmt man die neue Regel $(v+0=v)$ in E_G^4 dann sieht man, dass die Termersetzung $i(i(y+z)+y)+0=z$ überflüssig wird: sie kann aus $(v+0=v)$ und $i(i(u+v)+u)+w=v+w$ abgeleitet werden.

Endergebnis

Ein kanonisches Termersetzungssystem für die Gruppentheorie

E_{Group} :

$$
\begin{array}{lcl@{\qquad\qquad}lcl}
0 + x & \to & x & (x + y) + z & \to & x + (y + z) \\
x + 0 & \to & x & i(x) + (x + y) & \to & y \\
i(x) + x & \to & 0 & x + (i(x) + y) & \to & y \\
x + i(x) & \to & 0 & i(x + y) & \to & i(y) + i(x) \\
i(0) & \to & 0 & i(i(x)) & \to & x
\end{array}
$$