

# Formale Systeme

Prof. Dr. Bernhard Beckert, WS 2017/2018

LTL und Büchi-Automaten

KIT – INSTITUT FÜR THEORETISCHE INFORMATIK



## Definition

Eine **omega-Struktur**  $\mathcal{R} = (\mathbb{N}, <, \xi)$  für eine aussagenlogische Signatur  $P$  besteht aus der geordneten Menge der natürlichen Zahlen

$$(\mathbb{N}, <)$$

interpretiert als Menge abstrakter Zeitpunkte und einer Funktion

$$\xi : \mathbb{N} \rightarrow 2^P$$

mit der Intention

$$p \in \xi(n) \Leftrightarrow \text{in } \mathcal{R} \text{ ist } p \text{ zum Zeitpunkt } n \text{ wahr}$$

Für einen Automaten  $\mathcal{B} = (S, V, s_0, \delta, F)$  mit

$$V = 2^\Sigma, \quad \text{wobei}$$

$$\Sigma = \text{Menge aussagenlogischer Atome,}$$

können wir

- ▶ Omega-Strukturen  $\xi$  über  $\Sigma$  und
- ▶ unendliche Wörter  $w \in V^\omega$  über  $V$

identifizieren.

Für die folgenden drei Beispiele vereinbaren wir die folgende Notation

- ▶ eine aussagenlogische Signatur  $\Sigma$  mit  $p, q \in \Sigma$

Für die folgenden drei Beispiele vereinbaren wir die folgende Notation

- ▶ eine aussagenlogische Signatur  $\Sigma$  mit  $p, q \in \Sigma$
- ▶  $V = 2^\Sigma$

Für die folgenden drei Beispiele vereinbaren wir die folgende Notation

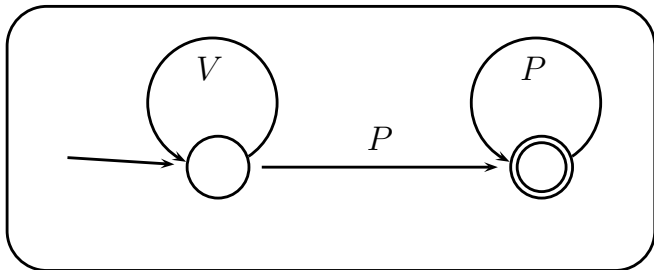
- ▶ eine aussagenlogische Signatur  $\Sigma$  mit  $p, q \in \Sigma$
- ▶  $V = 2^\Sigma$
- ▶  $P = \{b \in V \mid p \in b\}$

Für die folgenden drei Beispiele vereinbaren wir die folgende Notation

- ▶ eine aussagenlogische Signatur  $\Sigma$  mit  $p, q \in \Sigma$
- ▶  $V = 2^\Sigma$
- ▶  $P = \{b \in V \mid p \in b\}$
- ▶  $Q = \{b \in V \mid q \in b\}$

# Automat für $\diamond\Box p$

Für den Automaten  $\mathcal{A}_{dbp}$



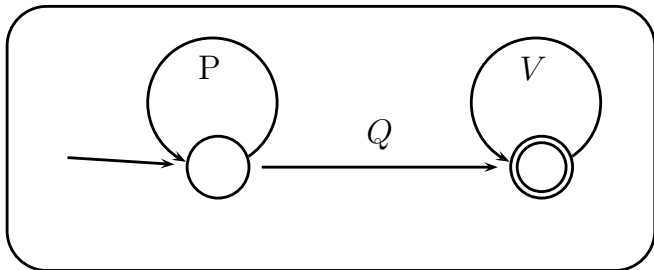
gilt

$$\xi \in L^\omega(\mathcal{A}_{dbp}) \Leftrightarrow \xi \models \diamond\Box p$$



# Automat für $p \mathbf{U} q$

Für den Automaten  $\mathcal{A}_{puntilq}$

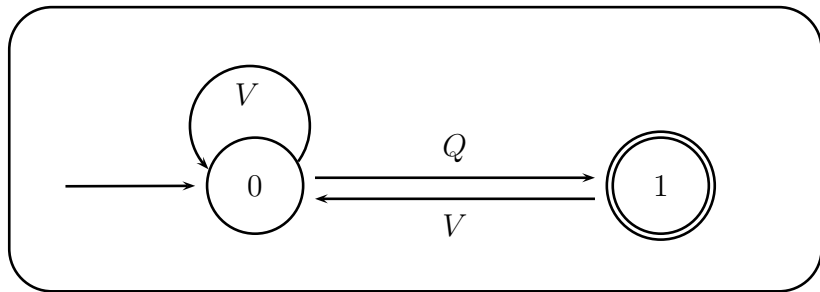


gilt

$$\xi \in L^\omega(\mathcal{A}_{puntilq}) \Leftrightarrow \xi \models p \mathbf{U} q$$

# Automat für $\square \diamond q$

Für den Automaten  $\mathcal{A}_{infq}$



gilt

$$\xi \in L^\omega(\mathcal{A}_{infq}) \Leftrightarrow \xi \models \square \diamond q$$

# Lemma

## Automat für Konjunktion

Seien

$$\mathcal{A}_1 = (\mathcal{S}_1, V, s_1^0, \delta_1, F_1),$$
$$\mathcal{A}_2 = (\mathcal{S}_2, V, s_2^0, \delta_2, F_2)$$

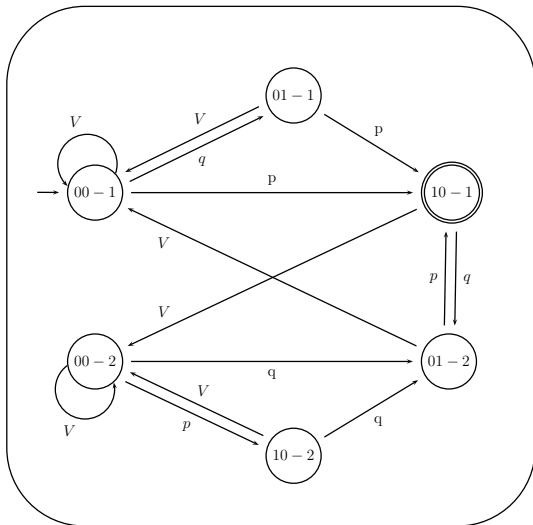
Büchi-Automaten,  
 $C_1, C_2$  LTL-Formeln mit

$$\mathcal{A}_1 \models C_1$$
$$\mathcal{A}_2 \models C_2$$

Dann gibt es einen Büchi-Automaten  $\mathcal{C}$  mit

$$\mathcal{C} \models C_1 \wedge C_2$$

# Automat für $\square\diamond p \wedge \square\diamond q$



# Allgemeine Konstruktion für Konjunktionsautomaten

Gegeben  $\mathcal{A}_i = (S_i, s_i^0, \delta_i, F_i)$

Gesucht  $\mathcal{C} = (S, s^0, \delta, F)$  mit  $L^\omega(\mathcal{C}) = L^\omega(\mathcal{A}_1) \cap L^\omega(\mathcal{A}_2)$ .

$$S = S_1 \times S_2 \times \{1, 2\}$$

$$s^0 = (s_1^0, s_2^0, 1)$$

$$F = F_1 \times S_2 \times \{1\}$$

falls  $s_1 \in F_1$  und  $i = 1$

$$(t_1, t_2, 2) \in \delta((s_1, s_2, i), a) \Leftrightarrow t_1 \in \delta_1(s_1, a) \text{ und } t_2 \in \delta_2(s_2, a)$$

falls  $s_2 \in F_2$  und  $i = 2$

$$(t_1, t_2, 1) \in \delta((s_1, s_2, i), a) \Leftrightarrow t_1 \in \delta_1(s_1, a) \text{ und } t_2 \in \delta_2(s_2, a)$$

sonst

$$(t_1, t_2, i) \in \delta((s_1, s_2, i), a) \Leftrightarrow i \in \{1, 2\}, \\ t_1 \in \delta_1(s_1, a) \text{ und } t_2 \in \delta_2(s_2, a)$$

Zu jeder LTL-Formel

$$B$$

gibt es einen – effektiv konstruierbaren – Büchi-Automaten

$$\mathcal{A}_B$$

mit

$$L^\omega(\mathcal{A}_B) = \{\xi \in V^\omega \mid \xi \models B\}$$

**Beweis:** Siehe Skriptum

Erfüllbarkeit und Allgemeingültigkeit von LTL Formeln ist entscheidbar.

Erfüllbarkeit und Allgemeingültigkeit von LTL Formeln ist entscheidbar.

Beweis:



Erfüllbarkeit und Allgemeingültigkeit von LTL Formeln ist entscheidbar.

Beweis:

Man konstruiert die Büchi-Automaten  $\mathcal{A}_B$  und  $\mathcal{A}_{\neg B}$ . Es gilt

$$B \text{ ist erfüllbar} \quad \Leftrightarrow \quad L^\omega(\mathcal{A}_B) \neq \emptyset$$

$$B \text{ ist allgemeingültig} \quad \Leftrightarrow \quad L^\omega(\mathcal{A}_{\neg B}) = \emptyset$$

Für jeden Büchi-Automaten  $\mathcal{C}$  ist die Frage  $L^\omega(\mathcal{C}) = \emptyset?$  entscheidbar.