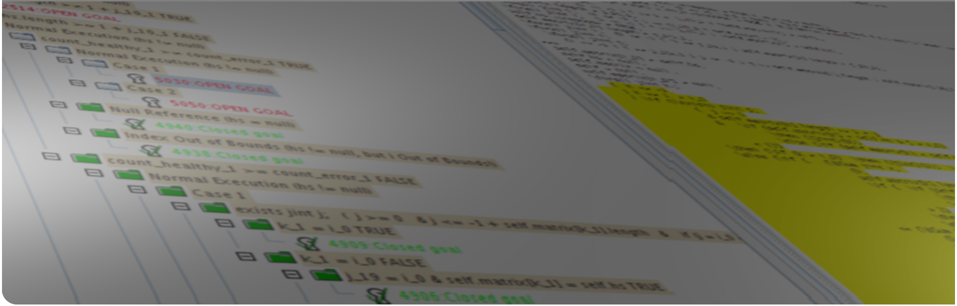
Karlsruhe Institute of Technology

Formale Systeme

Prof. Dr. Bernhard Beckert, WS 2018/2019

Binary Decision Diagrams

KIT – INSTITUT FÜR THEORETISCHE INFORMATIK



Shannon-Formeln

Shannon-Formeln sind aussagenlogische Formeln, die aufgebaut sind aus

- dem dreistelligen Operator *sh*

Shannon-Formeln

Shannon-Formeln sind aussagenlogische Formeln, die aufgebaut sind aus

- dem dreistelligen Operator *sh*
- den Konstanten 0 und 1

Shannon-Formeln

Shannon-Formeln sind aussagenlogische Formeln, die aufgebaut sind aus

- dem dreistelligen Operator *sh*
- den Konstanten 0 und 1
- Aussagevariablen $P_1, \ldots, P_n, \ldots$

Shannon-Formeln

Shannon-Formeln sind aussagenlogische Formeln, die aufgebaut sind aus

- dem dreistelligen Operator *sh*
- den Konstanten 0 und 1
- Aussagevariablen $P_1, \ldots, P_n, \ldots$

Semantik von *sh* für eine Interpretation *I*

Shannon-Formeln

Shannon-Formeln sind aussagenlogische Formeln, die aufgebaut sind aus

- dem dreistelligen Operator *sh*
- den Konstanten 0 und 1
- Aussagevariablen $P_1, \ldots, P_n, \ldots$

Semantik von *sh* für eine Interpretation I

$$val_I(sh(P_1, P_2, P_3)) = \begin{cases} val_I(P_2) & \text{falls} \quad val_I(P_1) = F \\ val_I(P_3) & \text{falls} \quad val_I(P_1) = W \end{cases}$$

Shannon-Formeln

Shannon-Formeln sind aussagenlogische Formeln, die aufgebaut sind aus

- dem dreistelligen Operator *sh*
- den Konstanten 0 und 1
- Aussagevariablen $P_1, \ldots, P_n, \ldots$

Semantik von *sh* für eine Interpretation I

$$val_I(sh(P_1, P_2, P_3)) = \begin{cases} val_I(P_2) & \text{falls} \quad val_I(P_1) = F \\ val_I(P_3) & \text{falls} \quad val_I(P_1) = W \end{cases}$$

oder in Tabellenform:

Shannon-Formeln

Shannon-Formeln sind aussagenlogische Formeln, die aufgebaut sind aus

- dem dreistelligen Operator *sh*
- den Konstanten 0 und 1
- Aussagevariablen $P_1, \ldots, P_n, \ldots$

Semantik von *sh* für eine Interpretation I

$$val_I(sh(P_1, P_2, P_3)) = \begin{cases} val_I(P_2) & \text{falls} \quad val_I(P_1) = F \\ val_I(P_3) & \text{falls} \quad val_I(P_1) = W \end{cases}$$

oder in Tabellenform:

$val_I(P_1)$	W	W	W	W	F	F	F	F
$val_I(P_2)$	W	W	F	F	**W**	**W**	**F**	**F**
$val_I(P_3)$	**W**	**F**	**W**	**F**	W	F	W	F
$val_I(sh(P_1, P_2, P_3))$	**W**	**F**	**W**	**F**	**W**	**W**	**F**	**F**

Eigenschaften des *sh*-Operators

- $sh(P_1, P_2, P_3) \leftrightarrow (\neg P_1 \land P_2) \lor (P_1 \land P_3)$

Eigenschaften des *sh*-Operators

- $sh(P_1, P_2, P_3) \leftrightarrow (\neg P_1 \wedge P_2) \vee (P_1 \wedge P_3)$
- $sh(P_1, P_2, P_3) \leftrightarrow (\neg P_1 \vee P_3) \wedge (P_1 \vee P_2)$

Eigenschaften des *sh*-Operators

- $sh(P_1, P_2, P_3) \leftrightarrow (\neg P_1 \wedge P_2) \vee (P_1 \wedge P_3)$
- $sh(P_1, P_2, P_3) \leftrightarrow (\neg P_1 \vee P_3) \wedge (P_1 \vee P_2)$
- $sh(P_1, P_2, P_3) \leftrightarrow (P_1 \rightarrow P_3) \wedge (\neg P_1 \rightarrow P_2)$

Eigenschaften des *sh*-Operators

- $sh(P_1, P_2, P_3) \leftrightarrow (\neg P_1 \wedge P_2) \vee (P_1 \wedge P_3)$
- $sh(P_1, P_2, P_3) \leftrightarrow (\neg P_1 \vee P_3) \wedge (P_1 \vee P_2)$
- $sh(P_1, P_2, P_3) \leftrightarrow (P_1 \rightarrow P_3) \wedge (\neg P_1 \rightarrow P_2)$
- $\neg sh(A, B, C) \leftrightarrow sh(A, \neg B, \neg C)$

Eigenschaften des *sh*-Operators

- $sh(P_1, P_2, P_3) \leftrightarrow (\neg P_1 \wedge P_2) \vee (P_1 \wedge P_3)$
- $sh(P_1, P_2, P_3) \leftrightarrow (\neg P_1 \vee P_3) \wedge (P_1 \vee P_2)$
- $sh(P_1, P_2, P_3) \leftrightarrow (P_1 \rightarrow P_3) \wedge (\neg P_1 \rightarrow P_2)$
- $\neg sh(A, B, C) \leftrightarrow sh(A, \neg B, \neg C)$
- $sh(0, P_2, P_3) \leftrightarrow P_2$

Eigenschaften des *sh*-Operators

- $sh(P_1, P_2, P_3) \leftrightarrow (\neg P_1 \wedge P_2) \vee (P_1 \wedge P_3)$
- $sh(P_1, P_2, P_3) \leftrightarrow (\neg P_1 \vee P_3) \wedge (P_1 \vee P_2)$
- $sh(P_1, P_2, P_3) \leftrightarrow (P_1 \rightarrow P_3) \wedge (\neg P_1 \rightarrow P_2)$
- $\neg sh(A, B, C) \leftrightarrow sh(A, \neg B, \neg C)$
- $sh(0, P_2, P_3) \leftrightarrow P_2$
- $sh(1, P_2, P_3) \leftrightarrow P_3$

Eigenschaften des *sh*-Operators

- $sh(P_1, P_2, P_3) \leftrightarrow (\neg P_1 \wedge P_2) \vee (P_1 \wedge P_3)$
- $sh(P_1, P_2, P_3) \leftrightarrow (\neg P_1 \vee P_3) \wedge (P_1 \vee P_2)$
- $sh(P_1, P_2, P_3) \leftrightarrow (P_1 \to P_3) \wedge (\neg P_1 \to P_2)$
- $\neg sh(A, B, C) \leftrightarrow sh(A, \neg B, \neg C)$
- $sh(0, P_2, P_3) \leftrightarrow P_2$
- $sh(1, P_2, P_3) \leftrightarrow P_3$
- $sh(P, 0, 1) \leftrightarrow P$

Eigenschaften des *sh*-Operators

- $sh(P_1, P_2, P_3) \leftrightarrow (\neg P_1 \wedge P_2) \vee (P_1 \wedge P_3)$
- $sh(P_1, P_2, P_3) \leftrightarrow (\neg P_1 \vee P_3) \wedge (P_1 \vee P_2)$
- $sh(P_1, P_2, P_3) \leftrightarrow (P_1 \rightarrow P_3) \wedge (\neg P_1 \rightarrow P_2)$
- $\neg sh(A, B, C) \leftrightarrow sh(A, \neg B, \neg C)$
- $sh(0, P_2, P_3) \leftrightarrow P_2$
- $sh(1, P_2, P_3) \leftrightarrow P_3$
- $sh(P, 0, 1) \leftrightarrow P$
- $sh(P, 1, 0) \leftrightarrow \neg P$

Eigenschaften des *sh*-Operators

- $sh(P_1, P_2, P_3) \leftrightarrow (\neg P_1 \wedge P_2) \vee (P_1 \wedge P_3)$
- $sh(P_1, P_2, P_3) \leftrightarrow (\neg P_1 \vee P_3) \wedge (P_1 \vee P_2)$
- $sh(P_1, P_2, P_3) \leftrightarrow (P_1 \rightarrow P_3) \wedge (\neg P_1 \rightarrow P_2)$
- $\neg sh(A, B, C) \leftrightarrow sh(A, \neg B, \neg C)$
- $sh(0, P_2, P_3) \leftrightarrow P_2$
- $sh(1, P_2, P_3) \leftrightarrow P_3$
- $sh(P, 0, 1) \leftrightarrow P$
- $sh(P, 1, 0) \leftrightarrow \neg P$
- $sh(P_1, P_2, P_2) \leftrightarrow P_2$

Eigenschaften des *sh*-Operators

- $sh(P_1, P_2, P_3) \leftrightarrow (\neg P_1 \wedge P_2) \vee (P_1 \wedge P_3)$
- $sh(P_1, P_2, P_3) \leftrightarrow (\neg P_1 \vee P_3) \wedge (P_1 \vee P_2)$
- $sh(P_1, P_2, P_3) \leftrightarrow (P_1 \rightarrow P_3) \wedge (\neg P_1 \rightarrow P_2)$
- $\neg sh(A, B, C) \leftrightarrow sh(A, \neg B, \neg C)$
- $sh(0, P_2, P_3) \leftrightarrow P_2$
- $sh(1, P_2, P_3) \leftrightarrow P_3$
- $sh(P, 0, 1) \leftrightarrow P$
- $sh(P, 1, 0) \leftrightarrow \neg P$
- $sh(P_1, P_2, P_2) \leftrightarrow P_2$
- $sh(sh(P_1, P_2, P_3), P_4, P_5) \quad \leftrightarrow$
  $sh(P_1, sh(P_2, P_4, P_5), sh(P_3, P_4, P_5))$

Eigenschaften des *sh*-Operators

- $sh(P_1, P_2, P_3) \leftrightarrow (\neg P_1 \wedge P_2) \vee (P_1 \wedge P_3)$
- $sh(P_1, P_2, P_3) \leftrightarrow (\neg P_1 \vee P_3) \wedge (P_1 \vee P_2)$
- $sh(P_1, P_2, P_3) \leftrightarrow (P_1 \rightarrow P_3) \wedge (\neg P_1 \rightarrow P_2)$
- $\neg sh(A, B, C) \leftrightarrow sh(A, \neg B, \neg C)$
- $sh(0, P_2, P_3) \leftrightarrow P_2$
- $sh(1, P_2, P_3) \leftrightarrow P_3$
- $sh(P, 0, 1) \leftrightarrow P$
- $sh(P, 1, 0) \leftrightarrow \neg P$
- $sh(P_1, P_2, P_2) \leftrightarrow P_2$
- $sh(sh(P_1, P_2, P_3), P_4, P_5) \quad \leftrightarrow$
  $sh(P_1, sh(P_2, P_4, P_5), sh(P_3, P_4, P_5))$
- $A \leftrightarrow sh(P, A_{P=0}, A_{P=1})$

Normierte Shannon-Formeln

Wir fixieren eine Ordnung auf der Menge der Aussagevariablen, etwa die durch die Ordnung der Indizes gegebene.

Definition

Normierte Shannon-Formeln

Wir fixieren eine Ordnung auf der Menge der Aussagevariablen, etwa die durch die Ordnung der Indizes gegebene.

Definition

1. Die Konstanten $0, 1$ sind normierte *sh*-Formeln.

Normierte Shannon-Formeln

Wir fixieren eine Ordnung auf der Menge der Aussagevariablen, etwa die durch die Ordnung der Indizes gegebene.

Definition

1. Die Konstanten $0, 1$ sind normierte *sh*-Formeln.
2. $sh(P_i, A, B)$ ist eine normierte *sh*-Formel wenn

Normierte Shannon-Formeln

Wir fixieren eine Ordnung auf der Menge der Aussagevariablen, etwa die durch die Ordnung der Indizes gegebene.

Definition

1. Die Konstanten $0, 1$ sind normierte *sh*-Formeln.
2. $sh(P_i, A, B)$ ist eine normierte *sh*-Formel wenn
   - A und B normierte *sh*-Formeln sind und

Normierte Shannon-Formeln

Wir fixieren eine Ordnung auf der Menge der Aussagevariablen, etwa die durch die Ordnung der Indizes gegebene.

Definition

1. Die Konstanten $0, 1$ sind normierte *sh*-Formeln.
2. $sh(P_i, A, B)$ ist eine normierte *sh*-Formel wenn
   - A und B normierte *sh*-Formeln sind und
   - für jede in A oder B vorkommende Variable P_j gilt $i < j$.

Normierte Shannon-Formeln

Wir fixieren eine Ordnung auf der Menge der Aussagevariablen, etwa die durch die Ordnung der Indizes gegebene.

Definition

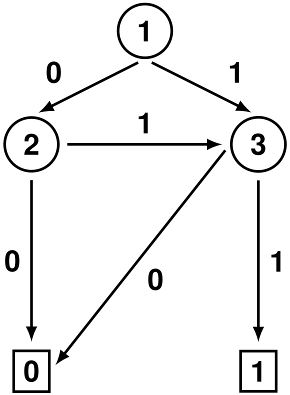
1. Die Konstanten $0, 1$ sind normierte *sh*-Formeln.
2. $sh(P_i, A, B)$ ist eine normierte *sh*-Formel wenn
   - A und B normierte *sh*-Formeln sind und
   - für jede in A oder B vorkommende Variable P_j gilt $i < j$.

Theorem

Zu jeder aussagenlogischen Formel gibt es eine äquivalente normierte sh-Formel.

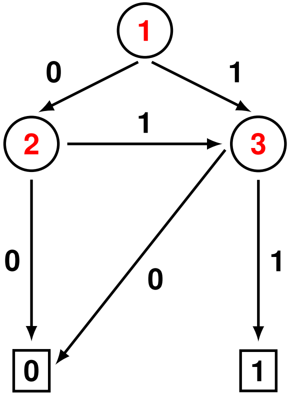
Shannon-Graphen

Shannon-Graphen



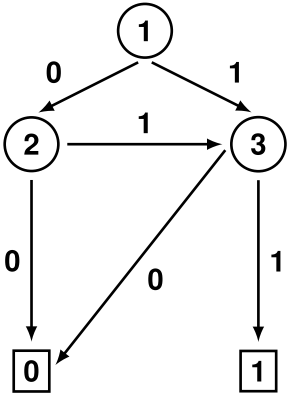
Ein *sh-Graph* ist ein gerichteter, binärer, zusammenhängender Graph.

Shannon-Graphen



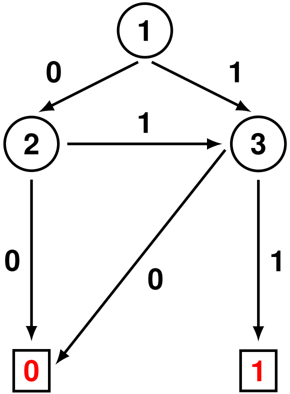
Jedem nichtterminalen Knoten v ist eine natürliche Zahl $index(v)$ zugeordnet.

Shannon-Graphen



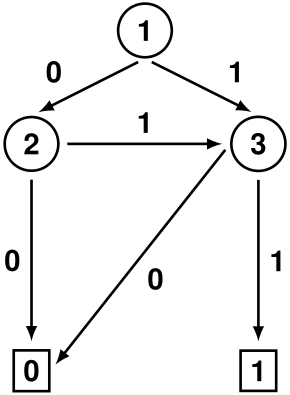
Von jedem nichtterminalen Knoten *v* gehen zwei Kanten aus.
Eine davon ist mit **0**, die andere mit **1** gekennzeichnet.

Shannon-Graphen



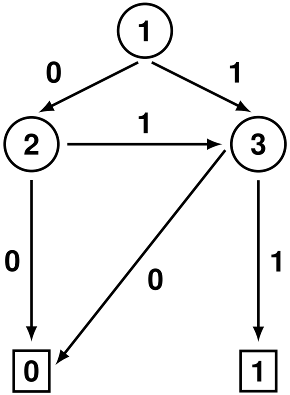
Jeder terminale Knoten v ist mit **0** oder **1** versehen. Wir definieren dafür $wert(v)$ durch $wert(\mathbf{0}) = \mathbf{F}$ und $wert(\mathbf{1}) = \mathbf{W}$.

Shannon-Graphen



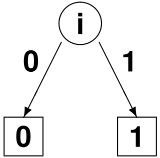
Ist der nichtterminale Knoten w ein unmittelbarer Nachfolger von v, dann gilt $index(v) < index(w)$.

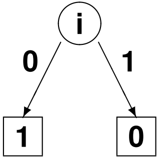
Shannon-Graphen

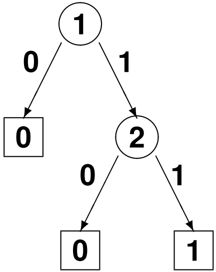


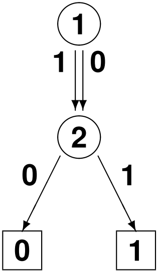
Es gibt genau einen Wurzelknoten.

Weitere Beispiele von Shannon-Graphen









Shannon-Graphen und Boolesche Funktionen

- Jedem *sh*-Graphen G kann man eine m-stellige Boolesche Funktion f_G zuordnen, wobei m die Anzahl der in G vorkommenden verschiedenen Indizes $i_1, \ldots, i_m$ ist.

Shannon-Graphen und Boolesche Funktionen

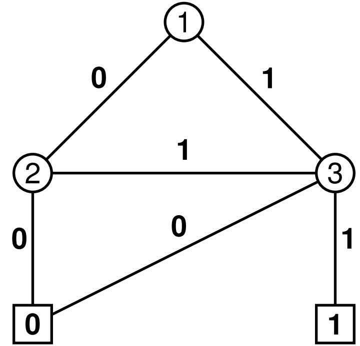
- Jedem *sh*-Graphen G kann man eine m-stellige Boolesche Funktion f_G zuordnen, wobei m die Anzahl der in G vorkommenden verschiedenen Indizes $i_1, \ldots, i_m$ ist.
- Wir fassen f_G als eine Funktion mit den Eingabevariabeln $P_{i_1}, \ldots, P_{i_m}$ auf und bestimmen den Funktionswert $f_G(P_{i_1}, \ldots, P_{i_m})$, indem wir an der Wurzel von G beginnend einen Pfad durch G wählen. Am Knoten v folgen wir der Kante **0**, wenn die Eingabevariable $P_{index(v)}$ den Wert F hat, sonst der Kante **1**.

Shannon-Graphen und Boolesche Funktionen

- Jedem *sh*-Graphen G kann man eine m-stellige Boolesche Funktion f_G zuordnen, wobei m die Anzahl der in G vorkommenden verschiedenen Indizes $i_1, \ldots, i_m$ ist.
- Wir fassen f_G als eine Funktion mit den Eingabevariabeln $P_{i_1}, \ldots, P_{i_m}$ auf und bestimmen den Funktionswert $f_G(P_{i_1}, \ldots, P_{i_m})$, indem wir an der Wurzel von G beginnend einen Pfad durch G wählen. Am Knoten v folgen wir der Kante **0**, wenn die Eingabevariable $P_{index(v)}$ den Wert F hat, sonst der Kante **1**.
- Der Wert des terminalen Knotens ist der gesuchte Funktionswert.

Shannongraph als Boolesche Funktion

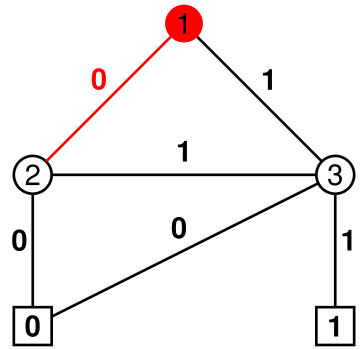
G:



$f_G(F, W, F) = ?$

Shannongraph als Boolesche Funktion

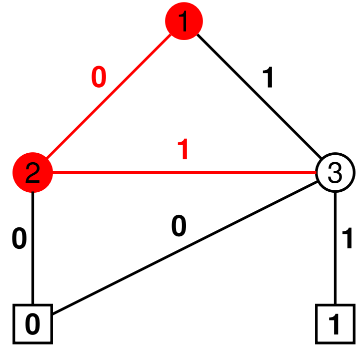
G:



$f_G(F, W, F) = ?$

Shannongraph als Boolesche Funktion

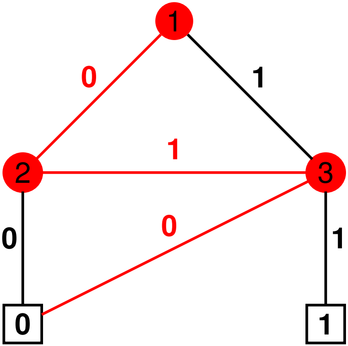
G:



$f_G(F, W, F) = ?$

Shannongraph als Boolesche Funktion

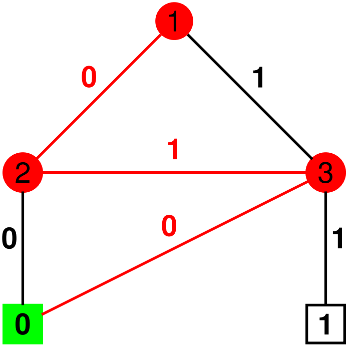
G:



$f_G(F, W, F) = ?$

Shannongraph als Boolesche Funktion

G:



$f_G(F, W, F) = F$

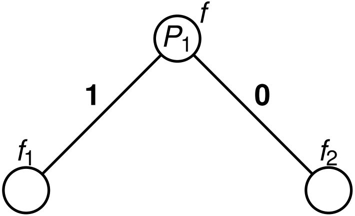
Konstruktion von Shannon-Graphen

Beispiel

$$f(P_1, P_2, P_3) = \begin{cases} W & \text{falls } \#\{1 \leq i \leq 3 \mid P_i = W\} = 2 \\ F & \text{sonst} \end{cases}$$

Konstruktion von Shannon-Graphen

Beispiel



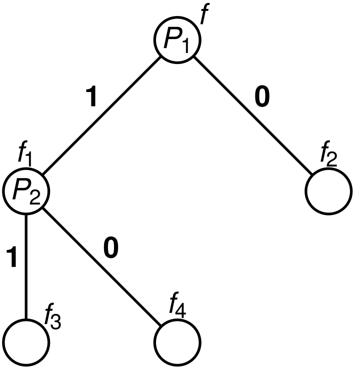
$$f(P_1, P_2, P_3) =$$
$$\begin{cases} W & \text{falls } \#\{1 \leq i \leq 3 \mid P_i = W\} = 2 \\ F & \text{sonst} \end{cases}$$

$$f_1(P_2, P_3) = f(W, P_2, P_3) =$$
$$\begin{cases} W & \text{falls } (P_2 = W \text{ und } P_3 = F) \text{ oder} \\ & \quad (P_2 = F \text{ und } P_3 = W) \\ F & \text{sonst} \end{cases}$$

$$f_2(P_2, P_3) = f(F, P_2, P_3) =$$
$$\begin{cases} W & \text{falls } P_2 = P_3 = W \\ F & \text{sonst} \end{cases}$$

Konstruktion von Shannon-Graphen

Beispiel



$$f(P_1, P_2, P_3) = \begin{cases} W & \text{falls } \#\{1 \leq i \leq 3 \mid P_i = W\} = 2 \\ F & \text{sonst} \end{cases}$$

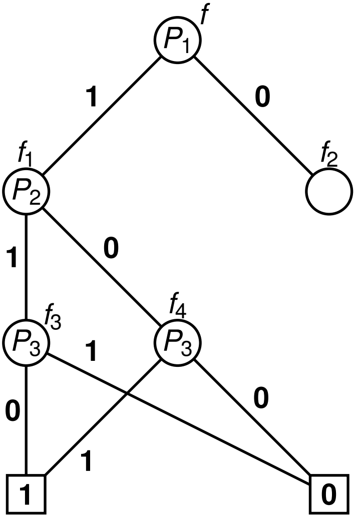
$$f_1(P_2, P_3) = f(W, P_2, P_3) = \begin{cases} W & \text{falls } (P_2 = W \text{ und } P_3 = F) \text{ oder} \\ & \qquad (P_2 = F \text{ und } P_3 = W) \\ F & \text{sonst} \end{cases}$$

$$f_2(P_2, P_3) = f(F, P_2, P_3) = \begin{cases} W & \text{falls } P_2 = P_3 = W \\ F & \text{sonst} \end{cases}$$

$$f_3(P_3) = f(W, W, P_3) = \neg P_3$$
$$f_4(P_3) = f(W, F, P_3) = P_3$$

Konstruktion von Shannon-Graphen

Beispiel



$f(P_1, P_2, P_3) =$

$$\begin{cases} W & \text{falls } \#\{1 \le i \le 3 \mid P_i = W\} = 2 \\ F & \text{sonst} \end{cases}$$

$f_1(P_2, P_3) = f(W, P_2, P_3) =$

$$\begin{cases} W & \text{falls } (P_2 = W \text{ und } P_3 = F) \text{ oder} \\ & \qquad (P_2 = F \text{ und } P_3 = W) \\ F & \text{sonst} \end{cases}$$

$f_2(P_2, P_3) = f(F, P_2, P_3) =$

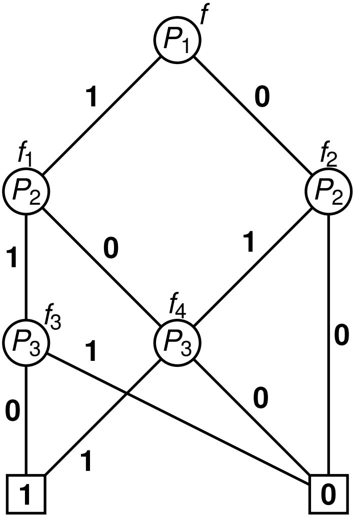
$$\begin{cases} W & \text{falls } P_2 = P_3 = W \\ F & \text{sonst} \end{cases}$$

$f_3(P_3) = f(W, W, P_3) = \neg P_3$

$f_4(P_3) = f(W, F, P_3) = P_3$

Konstruktion von Shannon-Graphen

Beispiel



$f(P_1, P_2, P_3) =$

$$\begin{cases} W & \text{falls } \#\{1 \leq i \leq 3 \mid P_i = W\} = 2 \\ F & \text{sonst} \end{cases}$$

$f_1(P_2, P_3) = f(W, P_2, P_3) =$

$$\begin{cases} W & \text{falls } (P_2 = W \text{ und } P_3 = F) \text{ oder} \\ & \qquad (P_2 = F \text{ und } P_3 = W) \\ F & \text{sonst} \end{cases}$$

$f_2(P_2, P_3) = f(F, P_2, P_3) =$

$$\begin{cases} W & \text{falls } P_2 = P_3 = W \\ F & \text{sonst} \end{cases}$$

$f_3(P_3) = f(W, W, P_3) = \neg P_3$
$f_4(P_3) = f(W, F, P_3) = P_3$

$f_5(P_3) = f(F, F, P_3) = F$
$f_6(P_3) = f(F, W, P_3) = P_3 = f_4(P_3)$

Shannon-Graphen vs normierte Shannon-Formeln

Es gibt eine offensichtliche **Korrespondenz** zwischen **Shannon-Graphen** und **normierten Shannon-Formeln**:

n-te Variable entspricht Knoten mit Index *n*.

Von jetzt an betrachten wir nur noch Shannon-Graphen.

Reduzierte Shannon-Graphen

Definition

Ein *sh*-Graph heißt *reduziert*, wenn

1. es keine zwei Knoten v und w ($v \neq w$) gibt, so daß der in v verwurzelte Teilgraph G_v mit dem in w verwurzelten Teilgraph G_w isomorph ist.

Reduzierte Shannon-Graphen

Definition

Ein *sh*-Graph heißt *reduziert*, wenn

1. es keine zwei Knoten v und w ($v \neq w$) gibt, so daß der in v verwurzelte Teilgraph G_v mit dem in w verwurzelten Teilgraph G_w isomorph ist.
2. es keinen Knoten v gibt, so dass die beiden von v ausgehenden Kanten zum selben Nachfolgerknoten führen.

Reduzierte Shannon-Graphen

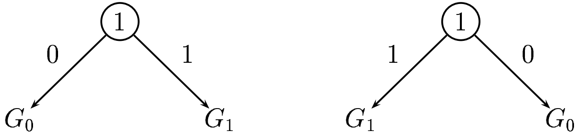
Definition

Ein *sh*-Graph heißt *reduziert*, wenn

1. es keine zwei Knoten v und w ($v \neq w$) gibt, so daß der in v verwurzelte Teilgraph G_v mit dem in w verwurzelten Teilgraph G_w isomorph ist.
2. es keinen Knoten v gibt, so dass die beiden von v ausgehenden Kanten zum selben Nachfolgerknoten führen.

Ein reduzierter Shannongraph heißt auch *ordered binary decision diagram*: (O)BDD.

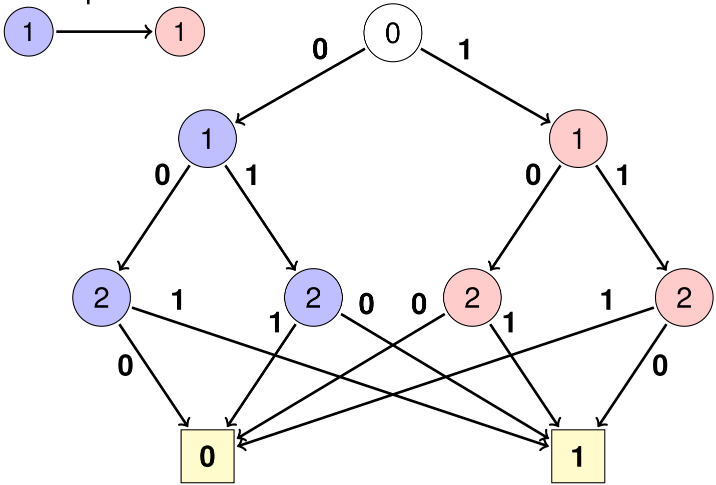
Einfachstes Beispiel isomorpher Shannon-Graphen



Beispiel für Reduktion

Elimination isomorpher Subgraphen

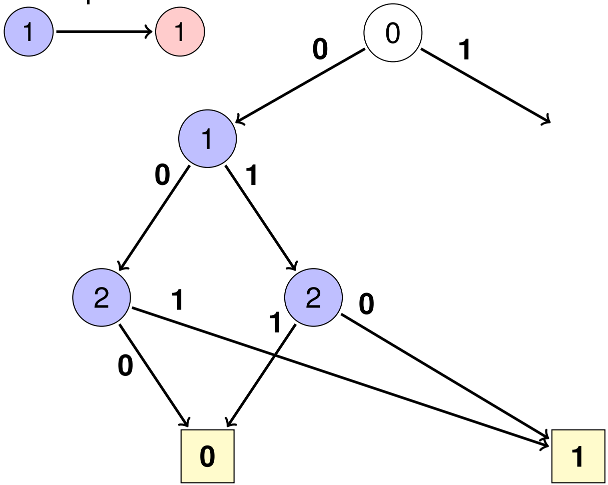
Isomorphismus π :



Beispiel für Reduktion

Elimination isomorpher Subgraphen

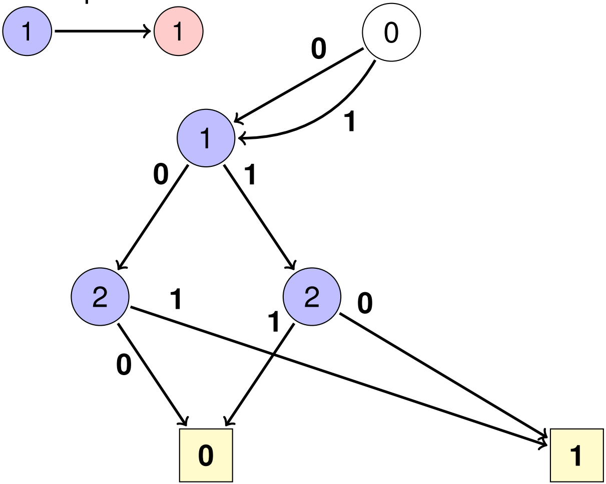
Isomorphismus π :



Beispiel für Reduktion

Elimination doppelter Kanten

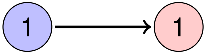
Isomorphismus π :

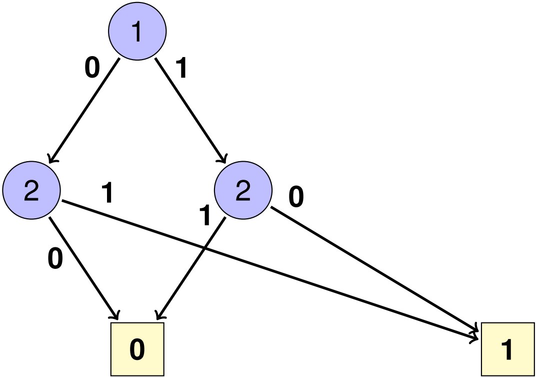


Beispiel für Reduktion

Elimination doppelter Kanten

Isomorphismus π :





Isomorphie von Shannon-Graphen

Definition

Seien zwei *sh*-Graphen H, G gegeben. Ihre Knotenmengen seien V_1, V_2.
H, G heißen zueinander *isomorph* ($H \cong G$) genau dann, wenn es eine bijektive Abbildung π von V_1 nach V_2 gibt mit:

Isomorphie von Shannon-Graphen

Definition

Seien zwei *sh*-Graphen H, G gegeben. Ihre Knotenmengen seien V_1, V_2.
H, G heißen zueinander *isomorph* ($H \cong G$) genau dann, wenn es eine bijektive Abbildung π von V_1 nach V_2 gibt mit:

1. $\mathit{index}(k) = \mathit{index}(\pi(k))$ für jeden Nichtterminalknoten $k \in V_1$

Isomorphie von Shannon-Graphen

Definition

Seien zwei *sh*-Graphen H, G gegeben. Ihre Knotenmengen seien V_1, V_2.
H, G heißen zueinander *isomorph* ($H \cong G$) genau dann, wenn es eine bijektive Abbildung π von V_1 nach V_2 gibt mit:

1. $\mathit{index}(k) = \mathit{index}(\pi(k))$ für jeden Nichtterminalknoten $k \in V_1$
2. $\mathit{wert}(k) = \mathit{wert}(\pi(k))$ für jeden Terminalknoten $k \in V_1$

Isomorphie von Shannon-Graphen

Definition

Seien zwei *sh*-Graphen H, G gegeben. Ihre Knotenmengen seien V_1, V_2.

H, G heißen zueinander *isomorph* ($H \cong G$) genau dann, wenn es eine bijektive Abbildung π von V_1 nach V_2 gibt mit:

1. $\mathit{index}(k) = \mathit{index}(\pi(k))$ für jeden Nichtterminalknoten $k \in V_1$
2. $\mathit{wert}(k) = \mathit{wert}(\pi(k))$ für jeden Terminalknoten $k \in V_1$
3. Für jeden Nichtterminalknoten $k \in V_1$, dessen **0**-Kante/**1**-Kante zu dem Knoten k_0/k_1 führt, gilt: die **0**-Kante von $\pi(k)$ führt zu $\pi(k_0)$, die **1**-Kante zu $\pi(k_1)$.

Ein Kriterium für Reduziertheit

Theorem

Sei G ein Shannongraph, so daß für jedes Paar von Knoten v, w gilt

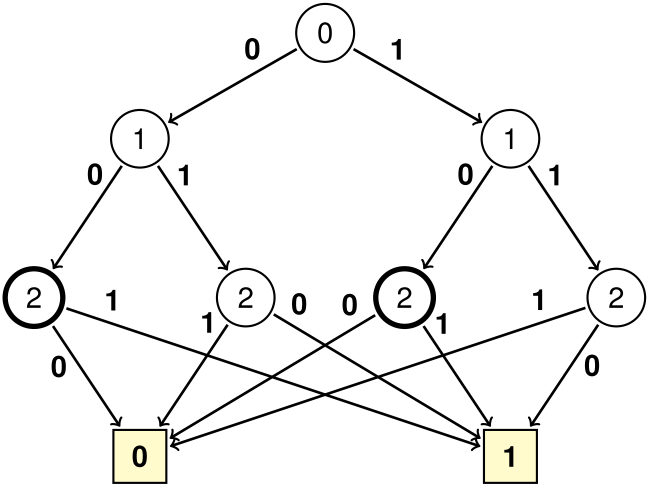
wenn	$index(v) = index(w)$,
	die **1**-*Nachfolger von* v *und* w *identisch sind und*
	die **0**-*Nachfolger von* v *und* w *identisch sind*
dann	$v = w$

Dann erfüllt G die Bedingung (1) aus der Definition reduzierter Shannongraphen, d.h. für jedes Paar x, y von Knoten gilt

wenn	G_x *isomorph zu* G_y *ist*
dann	$x = y$

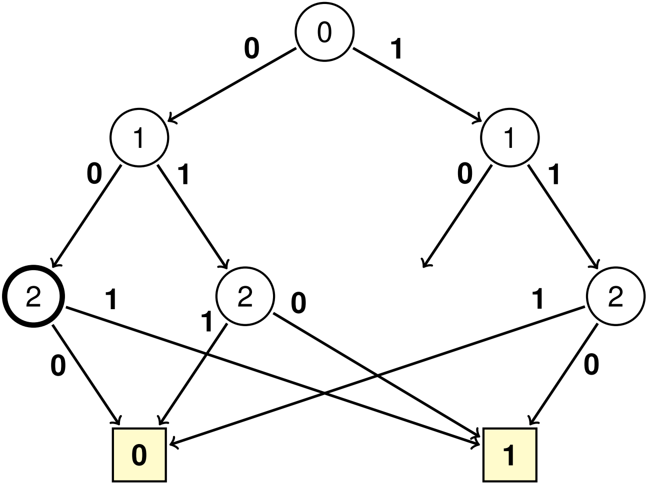
Beispiel für Reduktion

Nun inkrementell



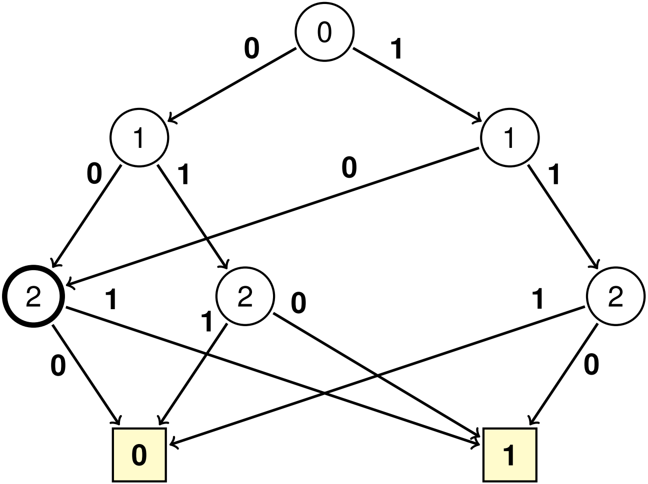
Beispiel für Reduktion

Nun inkrementell



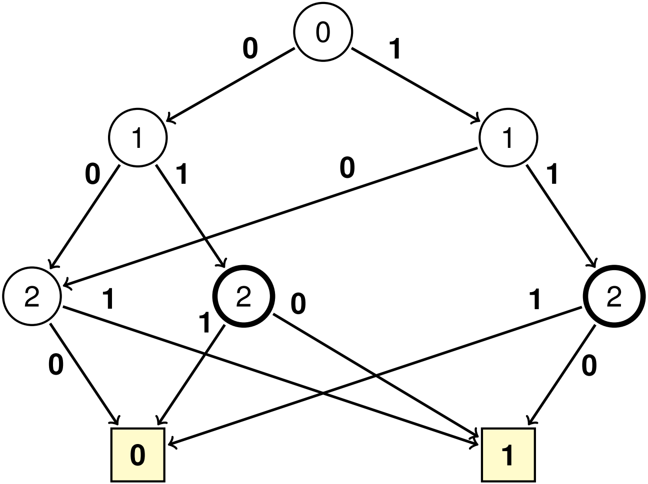
Beispiel für Reduktion

Nun inkrementell



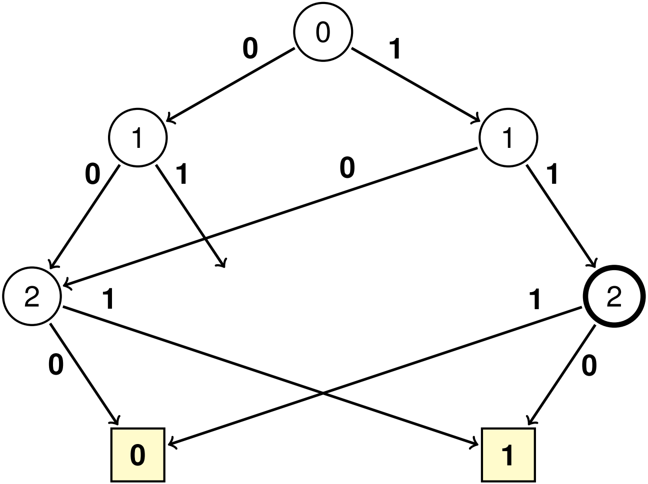
Beispiel für Reduktion

Nun inkrementell



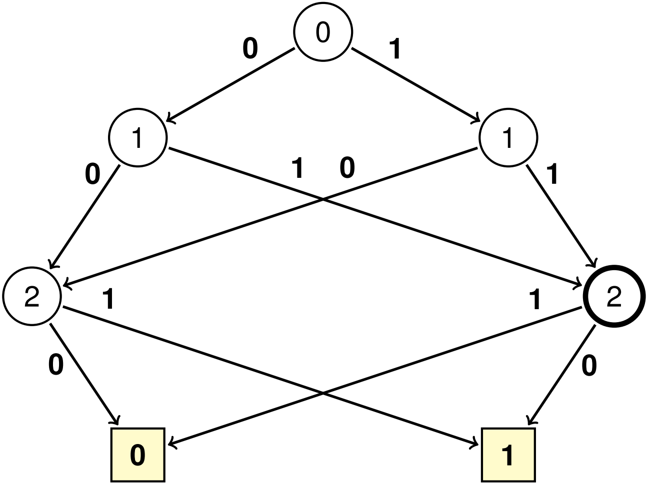
Beispiel für Reduktion

Nun inkrementell



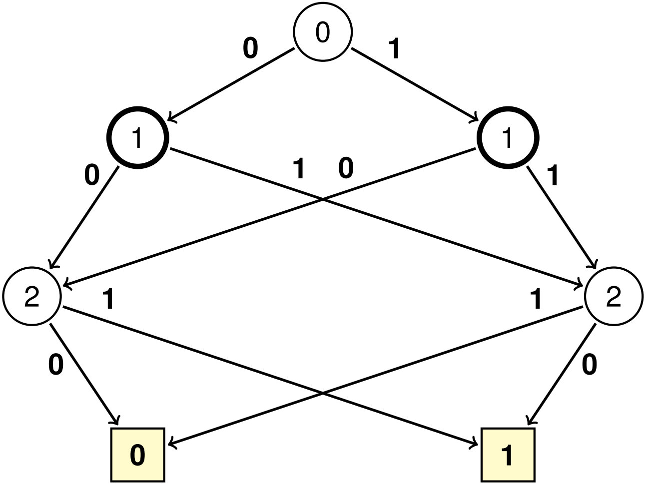
Beispiel für Reduktion

Nun inkrementell



Beispiel für Reduktion

Nun inkrementell



Eindeutigkeit reduzierter Shannon-Graphen

Theorem

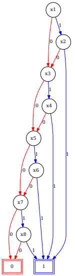
Sind G, H reduzierte sh-Graphen zu $\Sigma = \{P_1, ..., P_n\}$, dann gilt

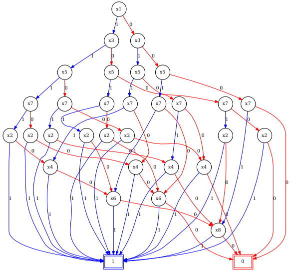
$$f_G = f_H \Leftrightarrow G \cong H.$$

(Zu jeder Booleschen Funktion f gibt es bis auf Isomorphie genau einen reduzierten sh-Graphen H mit $f = f_H$).

BDD-Größe in Abhängigkeit von Variablenordnung

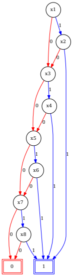
Zwei BDDs für $(x_1 \wedge x_2) \vee (x_3 \wedge x_4) \vee (x_5 \wedge x_6) \vee (x_7 \wedge x_8)$



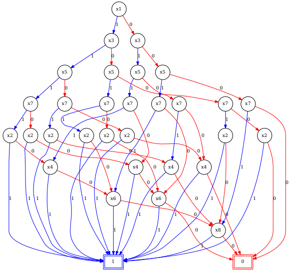


BDD-Größe in Abhängigkeit von Variablenordnung

Zwei BDDs für $(x_1 \land x_2) \lor (x_3 \land x_4) \lor (x_5 \land x_6) \lor (x_7 \land x_8)$



Ordnung:
$x_1 < x_2 < x_3 < x_4 < x_5 < x_6 < x_7 < x_8$



Ordnung:
$x_1 < x_3 < x_5 < x_7 < x_2 < x_4 < x_6 < x_8$

Eine harte Nuß

[BDD für Multiplikationen]

- X enthalte $2k$ Variablen $\{x_0, \ldots, x_{k-1}, y_0, \ldots, y_{k-1}\}$

Eine harte Nuß

[BDD für Multiplikationen]

- X enthalte $2k$ Variablen $\{x_0, \ldots, x_{k-1}, y_0, \ldots, y_{k-1}\}$
- $x = x_0 \ldots x_{k-1}$ und $y = y_0 \ldots y_{k-1}$ bezeichnen k-stellige Binärzahlen.

Eine harte Nuß

[BDD für Multiplikationen]

- X enthalte $2k$ Variablen $\{x_0, \ldots, x_{k-1}, y_0, \ldots, y_{k-1}\}$
- $x = x_0 \ldots x_{k-1}$ und $y = y_0 \ldots y_{k-1}$ bezeichnen k-stellige Binärzahlen.
- für $0 \leq i < 2k$ bezeichne $Mult_i$ die boolsche Funktion, die das i-te Bit des Produktes von x mit y beschreibt.

Eine harte Nuß

[BDD für Multiplikationen]

- X enthalte $2k$ Variablen $\{x_0, \ldots, x_{k-1}, y_0, \ldots, y_{k-1}\}$
- $x = x_0 \ldots x_{k-1}$ und $y = y_0 \ldots y_{k-1}$ bezeichnen k-stellige Binärzahlen.
- für $0 \leq i < 2k$ bezeichne $Mult_i$ die boolsche Funktion, die das i-te Bit des Produktes von x mit y beschreibt.

Eine harte Nuß

[BDD für Multiplikationen]

- X enthalte $2k$ Variablen $\{x_0, \ldots, x_{k-1}, y_0, \ldots, y_{k-1}\}$
- $x = x_0 \ldots x_{k-1}$ und $y = y_0 \ldots y_{k-1}$ bezeichnen k-stellige Binärzahlen.
- für $0 \leq i < 2k$ bezeichne $Mult_i$ die boolsche Funktion, die das i-te Bit des Produktes von x mit y beschreibt.

Theorem

Für jede Ordnung $<$ der Variablen in X gibt es einen Index $0 \leq i < 2k$, so dass der BDD $B_{Mult_i,<}$ mindestens $2^{k/8}$ Knoten besitzt.