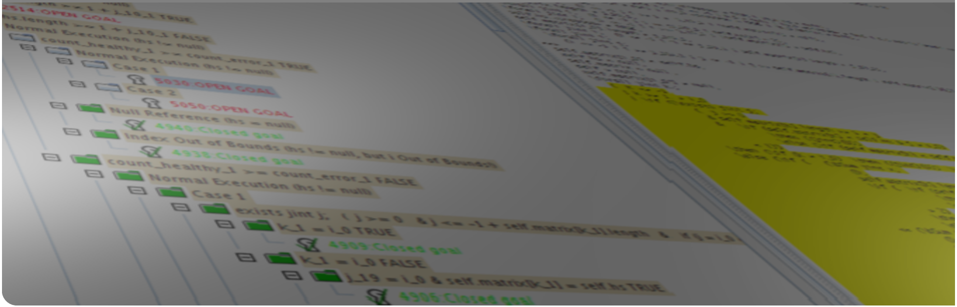
Formale Systeme

Prof. Dr. Bernhard Beckert, WS 2018/2019

Das Erfüllbarkeitsproblem

KIT – Institut für Theoretische Informatik



Das SAT Problem

oder Erfüllbarkeitsproblem

SAT

Instanz: Eine aussagenlogische Formel $F \in For0$

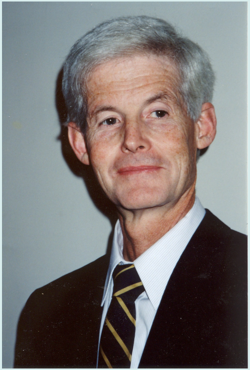
Frage: Ist F erfüllbar?
Gibt es eine Interpretation I mit $val_I(F) = \mathbf{W}$?

SAT ist ein *NP-vollständiges* Problem:

Gäbe es einen (deterministischen) polynomiellen Entscheidungsalgorithmus für die Erfüllbarkeit, dann wäre $NP = P$, d.h. jedes nichtdeterministisch-polynomielle Entscheidungsproblem auch deterministisch-polynomiell.

Satz von Cook

Stephen A. Cook $\star$1939



- Informatik-Professor an der Universität Toronto
- 1971: „Das Erfüllbarkeitsproblem der Aussagenlogik (SAT) ist NP-vollständig“
- Turing-Preisträger

Teilklassen

Das Erfüllbarkeitsproblem für Formeln

- in KNF ist NP-vollständig
- in 3-KNF ist NP-vollständig
- in 2-KNF ist polynomiell entscheidbar
- in DNF ist polynomiell entscheidbar ($O(n \log n)$)
- für Horn-Formeln ist polynomiell entscheidbar ($O(n^2)$)

Bemerkungen:

- k-KNF-Formeln sind Konjunktionen von Disjunktionen mit höchstens k Literalen.
- 2-KNF-Formeln heißen auch Krom-Formeln.

Horn-Formeln

Wichtigste Teilklasse mit nicht NP-vollständigem Erfüllbarkeitsproblem

Definition

Eine aussagenlogische Formel A ist eine *Horn-Formel*, wenn

- A in KNF ist,
- jede Disjunktion in A höchstens ein positives Literal enthält

Horn-Formeln

Alternative Schreibweise:

$\neg B_1 \vee \ldots \vee \neg B_m \vee A$	$B_1 \wedge \ldots \wedge B_m \rightarrow A$
$\neg B_1 \vee \ldots \vee \neg B_m$	$B_1 \wedge \ldots \wedge B_m \rightarrow \mathbf{0}$
A	A
leere Disjunktion	$\Box$

Bezeichnungen:

$B_1 \wedge \ldots \wedge B_m$: „Rumpf“ A: „Kopf“ (bei leerem Rumpf: „Fakt“)

Beispiel einer Horn-Formel

$$
\begin{array}{ll}
 & \neg P \\
\wedge & (Q \vee \neg R \vee \neg S) \\
\wedge & (\neg Q \vee \neg S) \\
\wedge & R \\
\wedge & S \\
\wedge & (\neg Q \vee P)
\end{array}
$$

Alternative Schreibweise

$$
\begin{array}{ll}
 & (P \rightarrow \mathbf{0}) \\
\wedge & (R \wedge S \rightarrow Q) \\
\wedge & (Q \wedge S \rightarrow \mathbf{0}) \\
\wedge & R \\
\wedge & S \\
\wedge & (Q \rightarrow P)
\end{array}
$$

Erfüllbarkeitsproblem für Horn-Formeln

Theorem

Für Horn-Formeln ist die Erfüllbarkeit in quadratischer Zeit entscheidbar.

Erfüllbarkeitstest

Sei $C = D_1 \wedge \ldots \wedge D_m$ eine Hornformel.
Ein Atom in C *markieren*, bedeutet, es an allen Stellen seines Auftretens in C zu markieren.

0: Falls keine Fakten existieren: Ausgabe „erfüllbar“. STOP.
Andernfalls: Markiere alle Fakten.

1: Falls kein $B_1 \wedge \ldots \wedge B_m \rightarrow K$ existiert, so dass alle B_i im Rumpf markiert sind: Ausgabe „erfüllbar“. STOP.

Falls ein $B_1 \wedge \ldots \wedge B_m \rightarrow \mathbf{0}$ existiert mit Kopf **0**, so dass alle Atome B_i im Rumpf markiert sind:
Ausgabe „unerfüllbar“. STOP.

Falls ein $B_1 \wedge \ldots \wedge B_m \rightarrow A$ existiert, so dass alle Atome B_i im Rumpf markiert sind aber der Kopf A nicht:
Markiere A. Gehe zu 1.

Andernfalls: Ausgabe „erfüllbar“. STOP.

Erfüllbarkeitstest

Beispiel

$$p$$

$$q$$

$$q \wedge r \rightarrow s$$

$$p \rightarrow r$$

$$s \rightarrow 0$$

Erfüllbarkeitstest

Beispiel

p

q

$q \wedge r \rightarrow s$

$p \rightarrow r$

$s \rightarrow 0$

Erfüllbarkeitstest

Beispiel

p

q

$q \land r \rightarrow s$

$p \rightarrow r$

$s \rightarrow 0$

Erfüllbarkeitstest

Beispiel

p

q

$q \wedge r \rightarrow s$

$p \rightarrow r$

$s \rightarrow 0$

Erfüllbarkeitstest

Beispiel

$$p$$

$$q$$

$$q \wedge r \rightarrow s$$

$$p \rightarrow r$$

$$s \rightarrow 0$$

Erfüllbarkeitstest

Beispiel

p

q

$q \wedge r \rightarrow s$

$p \rightarrow r$

$s \rightarrow 0$

Erfüllbarkeitstest

Beispiel

p

q

$q \wedge r \rightarrow s$

$p \rightarrow r$

$s \rightarrow 0$

Erfüllbarkeitstest

Beispiel

p

q

$q \wedge r \rightarrow s$

$p \rightarrow r$

$s \rightarrow 0$

Formelmenge nicht erfüllbar

Davis-Putnam-Logemann-Loveland-Verfahren

DPLL-Verfahren
Wichtigstes Verfahren zur Entscheidung des allgemeinen Erfüllbarkeitsproblems (SAT-Problem)

Das zur Zeit schnellste und fast ausschließlich benutzte Verfahren

Eingabe: Formel in KNF

Exkurs: Klauselschreibweise

In Disjunktionen und Konjunktionen
kommt es nicht auf

- die Reihenfolge der Teilformeln an
- die Multiplizität identischer Teilformeln an

Mengenschreibweise

Disjunktion als Menge: „Klausel“
KNF-Formel als Menge: „Klauselmenge“

Schreibweise:

$\square$ für die leere Klausel

$\emptyset$ für die leere Klauselmenge

Semantik der Klauselschreibweise

Semantik

I Interpretation, S Menge von Klauseln, C Klausel.

1. $val_I(S) = \begin{cases} \mathbf{W} & \text{falls für alle } C \in S \text{ gilt: } val_I(C) = \mathbf{W} \\ \mathbf{F} & \text{sonst} \end{cases}$
2. $val_I(C) = \begin{cases} \mathbf{W} & \text{falls ein } L \in C \text{ existiert mit } val_I(L) = \mathbf{W} \\ \mathbf{F} & \text{sonst} \end{cases}$
3. $I(\emptyset) = \mathbf{W}$.
4. $I(\square) = \mathbf{F}$.

DPLL-Verfahren (Pseudocode)

procedure DPLL(Klauselmenge S)
if $S = \emptyset$ **then return** 1;
if $\square \in S$ **then return** 0;
if S enthält Einerklausel
  then choose Einerklausel $\{L\} \in S$;
    return DPLL($\text{red}_{\{L\}}(S)$);
  else choose $P \in \text{atom}(S)$
    return $\max\{\text{DPLL}(S_P), \text{DPLL}(S_{\neg P})\}$;

- $\text{atom}(S) = \bigcup_{C \in S} \text{atom}(C)$,
  wobei $\text{atom}(C) = \{P \in \Sigma \mid P \in C \text{ oder } \neg P \in C\}$
- $\text{red}_{\{L\}}(S) = \{\text{red}_{\{L\}}(C) \mid C \in S \text{ mit } L \notin C\}$

  $\text{red}_{\{L\}}(C) = C \setminus \{\overline{L}\}$, wobei $\overline{A} = \neg A$ und $\overline{\neg A} = A$ für $A \in \Sigma$
- $S_P = S \cup \{\{P\}\}$ und $S_{\neg P} = S \cup \{\{\neg P\}\}$.

DPLL Beispiel

Wir beginnen mit der Klauselmenge S

$$\begin{array}{ll} P_1 \vee P_2 \vee P_3 & \neg P_1 \vee P_2 \vee \neg P_4 \\ \neg P_1 \vee P_3 & \neg P_1 \vee \neg P_3 \vee P_4 \\ P_1 \vee \neg P_3 & \neg {\color{red}P_2} \end{array}$$

Beim ersten Aufruf von DPLL(S) wird das Unterprogramm $red_{\{\neg P_2\}}(S)$ aufgerufen.

DPLL Beispiel

Wir beginnen mit der Klauselmenge S

$$
\begin{array}{ll}
P_1 \vee P_2 \vee P_3 & \neg P_1 \vee P_2 \vee \neg P_4 \\
\neg P_1 \vee P_3 & \neg P_1 \vee \neg P_3 \vee P_4 \\
P_1 \vee \neg P_3 & \neg P_2
\end{array}
$$

Beim ersten Aufruf von DPLL(S) wird das Unterprogramm $red_{\{\neg P_2\}}(S)$ aufgerufen und liefert S_1:

$$
\begin{array}{ll}
P_1 \vee P_3 & \neg P_1 \vee \neg P_4 \\
\neg P_1 \vee P_3 & \neg P_1 \vee \neg P_3 \vee P_4 \\
P_1 \vee \neg P_3 &
\end{array}
$$

rot	=	ganze Klausel entfernt
dunkelgrün	=	Literal aus Klausel entfernt
blau	=	unverändert

DPLL Beispiel

$$\begin{array}{ll} P_1 \vee P_3 & \neg P_1 \vee \neg P_4 \\ \neg P_1 \vee P_3 & \neg P_1 \vee \neg P_3 \vee P_4 \\ P_1 \vee \neg P_3 & \end{array}$$

S_1 enthält keine Einerklausel. Die Variable P_1 wird gewählt und DPLL($S_{1,0}$) und DPLL($S_{1,1}$) werden aufgerufen.

$S_{1,0}$:	$S_{1,1}$:
$P_1 \vee P_3$	$P_1 \vee P_3$
$\neg P_1 \vee \neg P_4$	$\neg P_1 \vee \neg P_4$
$\neg P_1 \vee P_3$	$\neg P_1 \vee P_3$
$\neg P_1 \vee \neg P_3 \vee P_4$	$\neg P_1 \vee \neg P_3 \vee P_4$
$P_1 \vee \neg P_3$	$P_1 \vee \neg P_3$
P_1	$\neg P_1$

DPLL Beispiel

$S_{1,0}$:
$P_1 \vee P_3$
$\neg P_1 \vee \neg P_4$
$\neg P_1 \vee P_3$
$\neg P_1 \vee \neg P_3 \vee P_4$
$P_1 \vee \neg P_3$
P_1

$red_{\{P_1\}}(S_{1,0})$

DPLL Beispiel

$S_{1,0}$:
$P_1 \vee P_3$
$\neg P_1 \vee \neg P_4$
$\neg P_1 \vee P_3$
$\neg P_1 \vee \neg P_3 \vee P_4$
$P_1 \vee \neg P_3$
P_1

$red_{\{P_1\}}(S_{1,0})$: Die Klauseln werden gestrichen.
Das Literal wird entfernt.

$$
\begin{aligned}
red_{\{P_1\}}(S_{1,0}) &= S_{2,0} \\
&= \{\neg P_4, P_3, \neg P_3 \vee P_4\}
\end{aligned}
$$

DPLL Beispiel

$$S_{2,0} = \{\neg P_4, P_3, \neg P_3 \vee P_4\}$$

Der Aufruf von $red_{\{P_3\}}(S_{2,0})$ liefert

$$\{\neg P_4, P_4\}$$

Dann:

$$red_{\{P_4\}}(\{P_4, \neg P_4\}) = \{\Box\}$$

woraus die Unerfüllbarkeit von $S_{1,0}$ folgt.

DPLL Beispiel

$S_{1,0}$:	$S_{1,1}$:
$P_1 \vee P_3$	$P_1 \vee P_3$
$\neg P_1 \vee \neg P_4$	$\neg P_1 \vee \neg P_4$
$\neg P_1 \vee P_3$	$\neg P_1 \vee P_3$
$\neg P_1 \vee \neg P_3 \vee P_4$	$\neg P_1 \vee \neg P_3 \vee P_4$
$P_1 \vee \neg P_3$	$P_1 \vee \neg P_3$
P_1	$\neg P_1$

Jetzt kommt die Abarbeitung von DPLL($S_{1,1}$) an die Reihe.

DPLL Beispiel

$S_{1,1}$:
$P_1 \vee P_3$
$\neg P_1 \vee \neg P_4$
$\neg P_1 \vee P_3$
$\neg P_1 \vee \neg P_3 \vee P_4$
$P_1 \vee \neg P_3$
$\neg P_1$

$red_{\{\neg P_1\}}(S_{1,1})$ entfernt die Klauseln, in denen $\neg P_1$ vorkommt ...

DPLL Beispiel

$$S_{1,1}:$$
$$P_1 \vee P_3$$
$$P_1 \vee \neg P_3$$

... und streicht in den restlichen P_1.
Das liefert

$$\{P_3, \neg P_3\}$$

woraus im nächsten Schritt

$$\{\Box\}$$

entsteht,
woraus die Unerfüllbarkeit von $S_{1,1}$ und damit insgesamt die Unerfüllbarkeit von S folgt.

DPLL

Theorem

1. Der DPLL Algorithmus terminiert für jede Eingabe.
2. Der DPLL Algorithmus ist korrekt und vollständig.
   2.1 aus DPLL(S) $= 1$ folgt, daß S erfüllbar ist und
   2.2 ist S erfüllbar, dann gilt DPLL(S) $= 1$.

Beweisidee:

Terminierung:

- Bei jeder Reduktion fällt ein Atom weg

Korrektheit/Vollständigkeit

- Jeder Schritt führt zu einer erfüllbarkeitsäquivalenten Klauselmenge
- $\emptyset$ ist erfüllbar
- $\{\Box\}$ ist unerfüllbar