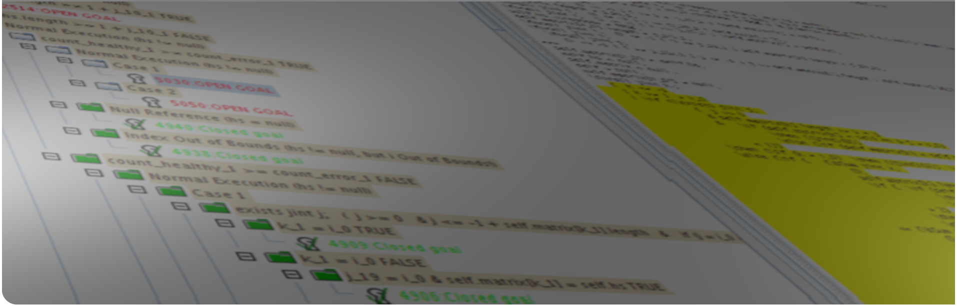
Formale Systeme

Prof. Dr. Bernhard Beckert, WS 2018/2019

Prädikatenlogik: Sequenzenkalkül

KIT – Institut für Theoretische Informatik



Sequenzen

Definition

Eine *Sequenz* ist ein Paar endlicher Formelmengen und wird notiert in der Form

$$\Gamma \Rightarrow \Delta.$$

Γ wird Antezedent und Δ Sukzedent genannt.

Sequenzen

Definition

Eine *Sequenz* ist ein Paar endlicher Formelmengen und wird notiert in der Form

$$\Gamma \Rightarrow \Delta.$$

Γ wird Antezedent und Δ Sukzedent genannt.
Sowohl Γ als auch Δ kann die leere Menge sein.

Sequenzen

Definition

Eine *Sequenz* ist ein Paar endlicher Formelmengen und wird notiert in der Form

$$\Gamma \Rightarrow \Delta.$$

Γ wird Antezedent und Δ Sukzedent genannt.
Sowohl Γ als auch Δ kann die leere Menge sein.
Sei $\mathcal{D}$ eine prädikatenlogische Struktur und β eine Variablenbelegung:

$$val_{\mathcal{D},\beta}(\Gamma \Rightarrow \Delta) = val_{\mathcal{D},\beta}(\bigwedge \Gamma \to \bigvee \Delta)$$

Sequenzen

Definition

Eine *Sequenz* ist ein Paar endlicher Formelmengen und wird notiert in der Form

$$\Gamma \Rightarrow \Delta.$$

Γ wird Antezedent und Δ Sukzedent genannt.
Sowohl Γ als auch Δ kann die leere Menge sein.
Sei $\mathcal{D}$ eine prädikatenlogische Struktur und β eine Variablenbelegung:

$$val_{\mathcal{D},\beta}(\Gamma \Rightarrow \Delta) = val_{\mathcal{D},\beta}(\bigwedge \Gamma \to \bigvee \Delta)$$

Es gelten die üblichen Vereinbarungen für leere Disjunktionen und Konjunktionen.

Aussagenlogische Axiome und Regeln

$$\text{axiom}\ \frac{}{\Gamma, F \Rightarrow F, \Delta}$$

Aussagenlogische Axiome und Regeln

$$\text{axiom} \ \frac{}{\Gamma, F \Rightarrow F, \Delta}$$

$$\text{not-left} \ \frac{\Gamma, \Rightarrow F, \Delta}{\Gamma, \neg F \Rightarrow \Delta}$$

Aussagenlogische Axiome und Regeln

$$\text{axiom}\ \frac{}{\Gamma, F \Rightarrow F, \Delta}$$

$$\text{not-left}\ \frac{\Gamma, \Rightarrow F, \Delta}{\Gamma, \neg F \Rightarrow \Delta}$$

$$\text{not-right}\ \frac{\Gamma, F \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \neg F, \Delta}$$

Aussagenlogische Axiome und Regeln

axiom $$\frac{}{\Gamma, F \Rightarrow F, \Delta}$$

not-left $$\frac{\Gamma, \Rightarrow F, \Delta}{\Gamma, \neg F \Rightarrow \Delta}$$

not-right $$\frac{\Gamma, F \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \neg F, \Delta}$$

impl-left
$$\frac{\Gamma \Rightarrow F, \Delta \quad \Gamma, G \Rightarrow \Delta}{\Gamma, F \to G \Rightarrow \Delta}$$

Aussagenlogische Axiome und Regeln

axiom $$\frac{}{\Gamma, F \Rightarrow F, \Delta}$$

not-left $$\frac{\Gamma, \Rightarrow F, \Delta}{\Gamma, \neg F \Rightarrow \Delta}$$

not-right $$\frac{\Gamma, F \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \neg F, \Delta}$$

impl-left

$$\frac{\Gamma \Rightarrow F, \Delta \quad \Gamma, G \Rightarrow \Delta}{\Gamma, F \to G \Rightarrow \Delta}$$

impl-right $$\frac{\Gamma, F \Rightarrow G, \Delta}{\Gamma \Rightarrow F \to G, \Delta}$$

Aussagenlogische Axiome und Regeln

axiom $$\frac{}{\Gamma, F \Rightarrow F, \Delta}$$

and-left $$\frac{\Gamma, F, G \Rightarrow \Delta}{\Gamma, F \wedge G \Rightarrow \Delta}$$

not-left $$\frac{\Gamma, \Rightarrow F, \Delta}{\Gamma, \neg F \Rightarrow \Delta}$$

not-right $$\frac{\Gamma, F \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \neg F, \Delta}$$

impl-left

$$\frac{\Gamma \Rightarrow F, \Delta \quad \Gamma, G \Rightarrow \Delta}{\Gamma, F \rightarrow G \Rightarrow \Delta}$$

impl-right $$\frac{\Gamma, F \Rightarrow G, \Delta}{\Gamma \Rightarrow F \rightarrow G, \Delta}$$

Aussagenlogische Axiome und Regeln

axiom $\dfrac{}{\Gamma, F \Rightarrow F, \Delta}$

not-left $\dfrac{\Gamma, \Rightarrow F, \Delta}{\Gamma, \neg F \Rightarrow \Delta}$

not-right $\dfrac{\Gamma, F \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \neg F, \Delta}$

impl-left

$$\frac{\Gamma \Rightarrow F, \Delta \quad \Gamma, G \Rightarrow \Delta}{\Gamma, F \to G \Rightarrow \Delta}$$

impl-right $\dfrac{\Gamma, F \Rightarrow G, \Delta}{\Gamma \Rightarrow F \to G, \Delta}$

and-left $\dfrac{\Gamma, F, G \Rightarrow \Delta}{\Gamma, F \wedge G \Rightarrow \Delta}$

and-right

$$\frac{\Gamma \Rightarrow F, \Delta \quad \Gamma \Rightarrow G, \Delta}{\Gamma \Rightarrow F \wedge G, \Delta}$$

Aussagenlogische Axiome und Regeln

axiom $\dfrac{}{\Gamma, F \Rightarrow F, \Delta}$

not-left $\dfrac{\Gamma, \Rightarrow F, \Delta}{\Gamma, \neg F \Rightarrow \Delta}$

not-right $\dfrac{\Gamma, F \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \neg F, \Delta}$

impl-left

$$\frac{\Gamma \Rightarrow F, \Delta \quad \Gamma, G \Rightarrow \Delta}{\Gamma, F \to G \Rightarrow \Delta}$$

impl-right $\dfrac{\Gamma, F \Rightarrow G, \Delta}{\Gamma \Rightarrow F \to G, \Delta}$

and-left $\dfrac{\Gamma, F, G \Rightarrow \Delta}{\Gamma, F \wedge G \Rightarrow \Delta}$

and-right

$$\frac{\Gamma \Rightarrow F, \Delta \quad \Gamma \Rightarrow G, \Delta}{\Gamma \Rightarrow F \wedge G, \Delta}$$

or-left

$$\frac{\Gamma, F \Rightarrow \Delta \quad \Gamma, G \Rightarrow \Delta}{\Gamma, F \vee G \Rightarrow \Delta}$$

Aussagenlogische Axiome und Regeln

axiom $$\frac{}{\Gamma, F \Rightarrow F, \Delta}$$

and-left $$\frac{\Gamma, F, G \Rightarrow \Delta}{\Gamma, F \wedge G \Rightarrow \Delta}$$

not-left $$\frac{\Gamma, \Rightarrow F, \Delta}{\Gamma, \neg F \Rightarrow \Delta}$$

and-right $$\frac{\Gamma \Rightarrow F, \Delta \quad \Gamma \Rightarrow G, \Delta}{\Gamma \Rightarrow F \wedge G, \Delta}$$

not-right $$\frac{\Gamma, F \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \neg F, \Delta}$$

or-left $$\frac{\Gamma, F \Rightarrow \Delta \quad \Gamma, G \Rightarrow \Delta}{\Gamma, F \vee G \Rightarrow \Delta}$$

impl-left $$\frac{\Gamma \Rightarrow F, \Delta \quad \Gamma, G \Rightarrow \Delta}{\Gamma, F \rightarrow G \Rightarrow \Delta}$$

impl-right $$\frac{\Gamma, F \Rightarrow G, \Delta}{\Gamma \Rightarrow F \rightarrow G, \Delta}$$

or-right $$\frac{\Gamma \Rightarrow F, G, \Delta}{\Gamma \Rightarrow F \vee G, \Delta}$$

Prädikatenlogische Regeln

all-left

$$\frac{\Gamma, \forall x F, \{x/X\}F \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \forall x F \Rightarrow \Delta}$$

X neue Variable.

Prädikatenlogische Regeln

all-left

$$\frac{\Gamma, \forall x F, \{x/X\}F \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \forall x F \Rightarrow \Delta}$$

X neue Variable.

all-right

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \{x/f(\bar{x})\}F, \Delta}{\Gamma \Rightarrow \forall x F, \Delta}$$

f neues Funktionssymbol, $\bar{x} = x_1, \ldots, x_n$ alle freien Variablen in $\forall x F$.

Prädikatenlogische Regeln

all-left

$$\frac{\Gamma, \forall x F, \{x/X\}F \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \forall x F \Rightarrow \Delta}$$

X neue Variable.

ex-right

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \exists x F, \{x/X\}F, \Delta}{\Gamma, \Rightarrow \exists x F, \Delta}$$

X neue Variable.

all-right

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \{x/f(\bar{x})\}F, \Delta}{\Gamma \Rightarrow \forall x F, \Delta}$$

f neues
Funktionssymbol,
$\bar{x} = x_1, \ldots, x_n$
alle freien
Variablen in $\forall x F$.

Prädikatenlogische Regeln

all-left

$$\frac{\Gamma, \forall x F, \{x/X\}F \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \forall x F \Rightarrow \Delta}$$

X neue Variable.

all-right

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \{x/f(\bar{x})\}F, \Delta}{\Gamma \Rightarrow \forall x F, \Delta}$$

f neues Funktionssymbol, $\bar{x} = x_1, \ldots, x_n$ alle freien Variablen in $\forall x F$.

ex-right

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \exists x F, \{x/X\}F, \Delta}{\Gamma, \Rightarrow \exists x F, \Delta}$$

X neue Variable.

ex-left

$$\frac{\Gamma, \{x/f(\bar{x})\}F \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \exists x F \Rightarrow \Delta}$$

f neues Funktionssymbol $\bar{x} = x_1, \ldots, x_n$ alle freien Variablen in $\exists x F$.

Axiome und Regeln für Gleichheit

identity-right

$$\frac{}{\Gamma \Rightarrow s \doteq s, \Delta}$$

Axiome und Regeln für Gleichheit

identity-right

$$\frac{}{\Gamma \Rightarrow s \doteq s, \Delta}$$

symmetry-right

$$\frac{\Gamma \Rightarrow s \doteq t, \Delta}{\Gamma \Rightarrow t \doteq s, \Delta}$$

Axiome und Regeln für Gleichheit

identity-right

$$\frac{}{\Gamma \Rightarrow s \doteq s, \Delta}$$

symmetry-right

$$\frac{\Gamma \Rightarrow s \doteq t, \Delta}{\Gamma \Rightarrow t \doteq s, \Delta}$$

symmetry-left

$$\frac{\Gamma, s \doteq t \Rightarrow \Delta}{\Gamma, t \doteq s \Rightarrow \Delta}$$

Axiome und Regeln für Gleichheit

identity-right

$$\frac{}{\Gamma \Rightarrow s \doteq s, \Delta}$$

symmetry-right

$$\frac{\Gamma \Rightarrow s \doteq t, \Delta}{\Gamma \Rightarrow t \doteq s, \Delta}$$

symmetry-left

$$\frac{\Gamma, s \doteq t \Rightarrow \Delta}{\Gamma, t \doteq s \Rightarrow \Delta}$$

eq-subst-right

$$\frac{\Gamma, s \doteq t \Rightarrow F(t), \Delta}{\Gamma, s \doteq t \Rightarrow F(s), \Delta}$$

Axiome und Regeln für Gleichheit

identity-right

$$\frac{}{\Gamma \Rightarrow s \doteq s, \Delta}$$

symmetry-right

$$\frac{\Gamma \Rightarrow s \doteq t, \Delta}{\Gamma \Rightarrow t \doteq s, \Delta}$$

symmetry-left

$$\frac{\Gamma, s \doteq t \Rightarrow \Delta}{\Gamma, t \doteq s \Rightarrow \Delta}$$

eq-subst-right

$$\frac{\Gamma, s \doteq t \Rightarrow F(t), \Delta}{\Gamma, s \doteq t \Rightarrow F(s), \Delta}$$

eq-subst-left

$$\frac{\Gamma, F(t), s \doteq t \Rightarrow \Delta}{\Gamma, F(s), s \doteq t \Rightarrow \Delta}$$

Ableitungsbaum in S

Definition

Ein Ableitungsbaum ist ein Baum, dessen Knoten mit Sequenzen markiert sind und:

1. hat ein Knoten n (nur) einen Nachfolgerknoten n_1 und sind $\Gamma \Rightarrow \Delta$ und $\Gamma_1 \Rightarrow \Delta_1$ die Markierungen von n und n_1, dann gibt es eine Sequenzenregel

$$\frac{\Gamma_1 \Rightarrow \Delta_1}{\Gamma \Rightarrow \Delta}$$

Ableitungsbaum in S

Definition

Ein Ableitungsbaum ist ein Baum, dessen Knoten mit Sequenzen markiert sind und:

1. hat ein Knoten n (nur) einen Nachfolgerknoten n_1 und sind $\Gamma \Rightarrow \Delta$ und $\Gamma_1 \Rightarrow \Delta_1$ die Markierungen von n und n_1, dann gibt es eine Sequenzenregel

$$\frac{\Gamma_1 \Rightarrow \Delta_1}{\Gamma \Rightarrow \Delta}$$

2. hat ein Knoten n zwei Nachfolgerknoten n_1 und n_2 und sind $\Gamma \Rightarrow \Delta$, $\Gamma_1 \Rightarrow \Delta_1$ und $\Gamma_2 \Rightarrow \Delta_2$ die Sequenzen an den Knoten n, n_1 und n_2 dann gibt es eine Sequenzenregel

$$\frac{\Gamma_1 \Rightarrow \Delta_1 \quad \Gamma_2 \Rightarrow \Delta_2}{\Gamma \Rightarrow \Delta}$$

Geschlossener Ableitungsbaum

Definition

Wir nennen einen Beweisbaum *geschlossen* oder *vollständig* wenn er zusätzlich noch die folgende Bedingung erfüllt:

3. es gibt eine Substitution σ, so daß für die Markierung A jedes Knoten n, der keinen Nachfolgerknoten hat, $\sigma(A)$ ein Axiom ist. Dazu zählen auch die beiden Gleichheitsaxiome.

Geschlossener Ableitungsbaum

Definition

Wir nennen einen Beweisbaum *geschlossen* oder *vollständig* wenn er zusätzlich noch die folgende Bedingung erfüllt:

3. es gibt eine Substitution σ, so daß für die Markierung A jedes Knoten n, der keinen Nachfolgerknoten hat, $\sigma(A)$ ein Axiom ist. Dazu zählen auch die beiden Gleichheitsaxiome.

Geschlossener Ableitungsbaum

Definition

Wir nennen einen Beweisbaum *geschlossen* oder *vollständig* wenn er zusätzlich noch die folgende Bedingung erfüllt:

3. es gibt eine Substitution σ, so daß für die Markierung A jedes Knoten n, der keinen Nachfolgerknoten hat, $\sigma(A)$ ein Axiom ist. Dazu zählen auch die beiden Gleichheitsaxiome.

Man beachte daß zunächst $A \equiv p(s) \Rightarrow p(t)$ kein Axiom zu sein braucht.
Ist σ aber ein Unifikator von s und t dann ist
$\sigma(A) \equiv p(\sigma(s)) \Rightarrow p(\sigma(t))$ zu einem Axiom wird.

Korrektheit und Vollständigkeit des Sequenzenkalküls

Theorem

Es seien $M \subseteq For_\Sigma$, $A \in For_\Sigma$. Dann gilt

$$M \vdash_S A \Rightarrow M \models A$$

Korrektheit und Vollständigkeit des Sequenzenkalküls

Theorem

Es seien $M \subseteq For_\Sigma, A \in For_\Sigma$. *Dann gilt*

$$M \vdash_S A \Rightarrow M \models A$$

Theorem

Es seien $M \subseteq For_\Sigma, A \in For_\Sigma$. *Dann gilt*

$$M \models A \Rightarrow M \vdash_S A$$