

Ein Puzzle

Drei Weisen werden Hüte aufgesetzt, jedem genau einen. Die Hüte sind entweder weiß oder schwarz, und jedem ist bekannt, daß mindestens ein schwarzer Hut mit dabei ist. Jeder Beteiligte sieht, welche Hüte die anderen beiden aufsitzen haben und soll erschließen, welchen Hut er aufsitzen hat, natürlich ohne in einen Spiegel zu schauen, den Hut abzunehmen oder ähnliches. Nach einer Weile sagt einer der Weisen: "Ich weiß nicht, welchen Hut ich aufhabe. Nach einer weiteren Pause des Nachdenkens sagt ein zweiter: "Ich weiß auch nicht, welchen Hut ich aufhabe. Dann", sagt der Dritte, "weiß ich, daß ich einen schwarzen Hut aufhabe."

Formalisierung des Puzzles

Notation

S_i der i -te Weise hat einen schwarzen Hut auf

W_i der i -te Weise hat einen weißen Hut auf

$\Box_i A$ der i -te Weise weiß, daß A wahr ist

jeweils für $i \in \{1, 2, 3\}$.

Formalisierung des Puzzles

Fakten

- $\neg \Box_1 S_1$ (B_1)

Formalisierung des Puzzles

Fakten

- $\neg\Box_1 S_1$ (B_1)
- $\neg\Box_2 S_2$ (B_2)

Formalisierung des Puzzles

Fakten

- $\neg \Box_1 S_1$ (B_1)
- $\neg \Box_2 S_2$ (B_2)
- $W_3 \wedge W_2 \rightarrow S_1$

Formalisierung des Puzzles

Fakten

- $\neg \Box_1 S_1$ (B_1)
- $\neg \Box_2 S_2$ (B_2)
- $W_3 \wedge W_2 \rightarrow S_1$
- $W_3 \rightarrow \Box_1 W_3$

Formalisierung des Puzzles

Fakten

- $\neg \Box_1 S_1$ (B_1)
- $\neg \Box_2 S_2$ (B_2)
- $W_3 \wedge W_2 \rightarrow S_1$
- $W_3 \rightarrow \Box_1 W_3$
- $W_2 \rightarrow \Box_1 W_2$

Formalisierung des Puzzles

Fakten

- $\neg \Box_1 S_1$ (B_1)
- $\neg \Box_2 S_2$ (B_2)
- $W_3 \wedge W_2 \rightarrow S_1$
- $W_3 \rightarrow \Box_1 W_3$
- $W_2 \rightarrow \Box_1 W_2$
- $\neg W_3 \rightarrow \Box_2 \neg W_3$

Formalisierung des Puzzles

Fakten

- $\neg \Box_1 S_1$ (B_1)
- $\neg \Box_2 S_2$ (B_2)
- $W_3 \wedge W_2 \rightarrow S_1$
- $W_3 \rightarrow \Box_1 W_3$
- $W_2 \rightarrow \Box_1 W_2$
- $\neg W_3 \rightarrow \Box_2 \neg W_3$
- $\neg W_2 \rightarrow S_2$

Formalisierung des Puzzles

Fakten

- $\neg \Box_1 S_1$ (B_1)
- $\neg \Box_2 S_2$ (B_2)
- $W_3 \wedge W_2 \rightarrow S_1$
- $W_3 \rightarrow \Box_1 W_3$
- $W_2 \rightarrow \Box_1 W_2$
- $\neg W_3 \rightarrow \Box_2 \neg W_3$
- $\neg W_2 \rightarrow S_2$
- $\neg W_3 \rightarrow S_3$

Akzeptable Axiome

- alle AL-Axiome z.B. $\Box_1 A \vee \neg \Box_1 A$

Akzeptable Axiome

- alle AL-Axiome z.B. $\Box_1 A \vee \neg\Box_1 A$
- $(\Box A \wedge \Box(A \rightarrow B)) \rightarrow \Box B$

(K)

Akzeptable Axiome

- alle AL-Axiome z.B. $\Box_1 A \vee \neg\Box_1 A$
- $(\Box A \wedge \Box(A \rightarrow B)) \rightarrow \Box B$ (K)
- $\Box(A \rightarrow B) \rightarrow (\Box(A) \rightarrow \Box B)$ (K)

Akzeptable Schlußregeln

- modus ponens

Akzeptable Schlußregeln

- modus ponens

- $$\frac{A}{\Box A}$$

(G)

Akzeptable Schlußregeln

- modus ponens

- $$\frac{A}{\Box A} \quad (\text{G})$$

- $$\frac{A \rightarrow B}{\Box(A) \rightarrow \Box(B)} \quad (\text{I})$$

Akzeptable Schlußregeln

- modus ponens

- $$\frac{A}{\Box A} \quad (\text{G})$$

- $$\frac{A \rightarrow B}{\Box(A) \rightarrow \Box(B)} \quad (\text{I})$$

- $$\frac{A \leftrightarrow B}{\Box(A) \leftrightarrow \Box(B)} \quad (\text{E})$$

Akzeptable Schlußregeln

- modus ponens

- $$\frac{A}{\Box A} \quad (\text{G})$$

- $$\frac{A \rightarrow B}{\Box(A) \rightarrow \Box(B)} \quad (\text{I})$$

- $$\frac{A \leftrightarrow B}{\Box(A) \leftrightarrow \Box(B)} \quad (\text{E})$$

Aus (K), (G) und Aussagenlogik folgen alle anderen Axiome und Regeln.

Eine formale Ableitung

$$W_3 \wedge W_2 \rightarrow S_1$$

Faktum

(1)

Eine formale Ableitung

$$W_3 \wedge W_2 \rightarrow S_1 \quad (1)$$

Faktum

$$\Box_1(W_3 \wedge W_2 \rightarrow S_1) \quad (2)$$

aus (1) mit (G)

Eine formale Ableitung

$$W_3 \wedge W_2 \rightarrow S_1 \quad (1)$$

Faktum

$$\Box_1(W_3 \wedge W_2 \rightarrow S_1) \quad (2)$$

aus (1) mit (G)

$$\Box_1(W_3 \wedge W_2 \rightarrow S_1) \wedge \neg\Box_1(S_1) \rightarrow \neg\Box_1(W_3 \wedge W_2) \quad (3)$$

aus (K) und Aussagenlogik

Eine formale Ableitung

$$W_3 \wedge W_2 \rightarrow S_1 \quad (1)$$

Faktum

$$\Box_1(W_3 \wedge W_2 \rightarrow S_1) \quad (2)$$

aus (1) mit (G)

$$\Box_1(W_3 \wedge W_2 \rightarrow S_1) \wedge \neg\Box_1(S_1) \rightarrow \neg\Box_1(W_3 \wedge W_2) \quad (3)$$

aus (K) und Aussagenlogik

$$\neg\Box_1(W_3 \wedge W_2) \quad (4)$$

aus (2), (3) und Faktum B_1 mit (MP)

Eine formale Ableitung (Forts.)

$$(W_3 \rightarrow \Box_1 W_3) \wedge (W_2 \rightarrow \Box_1 W_2) \quad (5)$$

Fakten

Eine formale Ableitung (Forts.)

$$(W_3 \rightarrow \Box_1 W_3) \wedge (W_2 \rightarrow \Box_1 W_2) \quad (5)$$

Fakten

$$W_3 \wedge W_2 \rightarrow \Box_1 W_3 \wedge \Box_1 W_2 \quad (6)$$

mit AL aus (5)

Eine formale Ableitung (Forts.)

$$(W_3 \rightarrow \Box_1 W_3) \wedge (W_2 \rightarrow \Box_1 W_2) \quad (5)$$

Fakten

$$W_3 \wedge W_2 \rightarrow \Box_1 W_3 \wedge \Box_1 W_2 \quad (6)$$

mit AL aus (5)

$$W_3 \wedge W_2 \rightarrow \Box_1 (W_3 \wedge W_2) \quad (7)$$

mit (M), AL und (6)

Eine formale Ableitung (Forts.)

$$(W_3 \rightarrow \Box_1 W_3) \wedge (W_2 \rightarrow \Box_1 W_2) \quad (5)$$

Fakten

$$W_3 \wedge W_2 \rightarrow \Box_1 W_3 \wedge \Box_1 W_2 \quad (6)$$

mit AL aus (5)

$$W_3 \wedge W_2 \rightarrow \Box_1 (W_3 \wedge W_2) \quad (7)$$

mit (M), AL und (6)

$$\neg(W_3 \wedge W_2) \quad (8)$$

mit AL aus (7) und (4)

Eine formale Ableitung (Forts.)

$\Box_2(W_3 \rightarrow \neg W_2)$

mit AL und Regel (G) aus (8)

(9)

Eine formale Ableitung (Forts.)

$$\Box_2(W_3 \rightarrow \neg W_2) \quad (9)$$

mit AL und Regel (G) aus (8)

$$\Box_2 W_3 \rightarrow \Box \neg W_2 \quad (10)$$

mit Axiom (K) und AL aus (9)

Eine formale Ableitung (Forts.)

$$\Box_2(W_3 \rightarrow \neg W_2) \quad (9)$$

mit AL und Regel (G) aus (8)

$$\Box_2 W_3 \rightarrow \Box \neg W_2 \quad (10)$$

mit Axiom (K) und AL aus (9)

$$\neg \Box \neg W_2 \rightarrow \neg \Box_2 W_3 \quad (11)$$

Kontraposition von (10)

Eine formale Ableitung (Forts.)

$$\Box_2(W_3 \rightarrow \neg W_2) \quad (9)$$

mit AL und Regel (G) aus (8)

$$\Box_2 W_3 \rightarrow \Box \neg W_2 \quad (10)$$

mit Axiom (K) und AL aus (9)

$$\neg \Box \neg W_2 \rightarrow \neg \Box_2 W_3 \quad (11)$$

Kontraposition von (10)

$$\neg W_2 \rightarrow S_2 \quad (12)$$

Faktum

Eine formale Ableitung (Forts.)

$\Box_2(\neg W_2 \rightarrow S_2)$

mit Regel (G) aus (12)

(13)

Eine formale Ableitung (Forts.)

$$\Box_2(\neg W_2 \rightarrow S_2) \quad (13)$$

mit Regel (G) aus (12)

$$\Box_2\neg W_2 \rightarrow \Box_2 S_2 \quad (14)$$

mit (MP), Axiom (K) aus (13)

Eine formale Ableitung (Forts.)

$$\Box_2(\neg W_2 \rightarrow S_2) \quad (13)$$

mit Regel (G) aus (12)

$$\Box_2\neg W_2 \rightarrow \Box_2 S_2 \quad (14)$$

mit (MP), Axiom (K) aus (13)

$$\neg\Box_2\neg W_2 \quad (15)$$

aus (14) mit AL und Faktum B_2

Eine formale Ableitung (Forts.)

$$\Box_2(\neg W_2 \rightarrow S_2) \quad (13)$$

mit Regel (G) aus (12)

$$\Box_2\neg W_2 \rightarrow \Box_2 S_2 \quad (14)$$

mit (MP), Axiom (K) aus (13)

$$\neg\Box_2\neg W_2 \quad (15)$$

aus (14) mit AL und Faktum B_2

$$\neg\Box_2 W_3 \quad (16)$$

aus (15) und (11)

Eine formale Ableitung (Forts.)

$\neg W_3$

(17)

aus (16), dem Faktum $\neg W_3 \rightarrow \Box_2 \neg W_3$ und AL

Eine formale Ableitung (Forts.)

$\neg W_3$ (17)
aus (16), dem Faktum $\neg W_3 \rightarrow \Box_2 \neg W_3$ und AL

S_3 (18)
aus (17) mit dem Faktum $\neg W_3 \rightarrow S_3$

Eine formale Ableitung (Forts.)

$\neg W_3$ (17)
aus (16), dem Faktum $\neg W_3 \rightarrow \Box_2 \neg W_3$ und AL

S_3 (18)
aus (17) mit dem Faktum $\neg W_3 \rightarrow S_3$

$\Box_3 S_3$ (19)
mit Regel (G) aus (18)