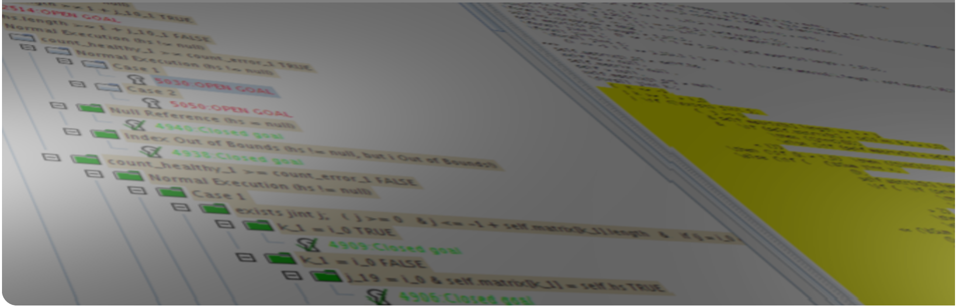
Formale Systeme

Prof. Dr. Bernhard Beckert, WS 2018/2019

LTL und Büchi-Automaten

KIT – Institut für Theoretische Informatik



Omega-Strukturen (Wiederholung)

Definition

Eine omega-Struktur $\mathcal{R} = (\mathbb{N}, <, \xi)$ für eine aussagenlogische Signatur P besteht aus der geordneten Menge der natürlichen Zahlen

$$(\mathbb{N}, <)$$

interpretiert als Menge abstrakter Zeitpunkte und einer Funktion

$$\xi : \mathbb{N} \to 2^P$$

mit der Intention

$$p \in \xi(n) \Leftrightarrow \text{ in } \mathcal{R} \text{ ist } p \text{ zum Zeitpunkt } n \text{ wahr}$$

LTL und Büchi-Automaten

Für einen Automaten $\mathcal{B} = (S, V, s_0, \delta, F)$ mit

$$\begin{array}{rcl} V & = & 2^{\Sigma}, \quad \text{wobei} \\ \Sigma & = & \text{Menge aussagenlogischer Atome}, \end{array}$$

können wir

- Omega-Strukturen ξ über Σ und
- unendliche Wörter $w \in V^{\omega}$ über V

identifizieren.

Notation

Für die folgenden drei Beispiele vereinbaren wir die folgende Notation

- eine aussagenlogische Signatur Σ mit $p, q \in \Sigma$

Notation

Für die folgenden drei Beispiele vereinbaren wir die folgende Notation

- eine aussagenlogische Signatur Σ mit $p, q \in \Sigma$
- $V = 2^{\Sigma}$

Notation

Für die folgenden drei Beispiele vereinbaren wir die folgende Notation

- eine aussagenlogische Signatur Σ mit $p, q \in \Sigma$
- $V = 2^{\Sigma}$
- $P = \{b \in V \mid p \in b\}$

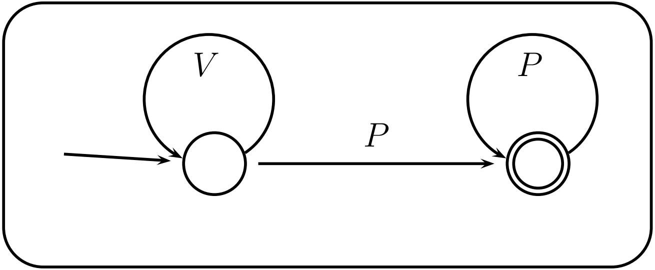
Notation

Für die folgenden drei Beispiele vereinbaren wir die folgende Notation

- eine aussagenlogische Signatur Σ mit $p, q \in \Sigma$
- $V = 2^{\Sigma}$
- $P = \{b \in V \mid p \in b\}$
- $Q = \{b \in V \mid q \in b\}$

Automat für $\Diamond\Box p$

Für den Automaten $\mathcal{A}_{dbp}$

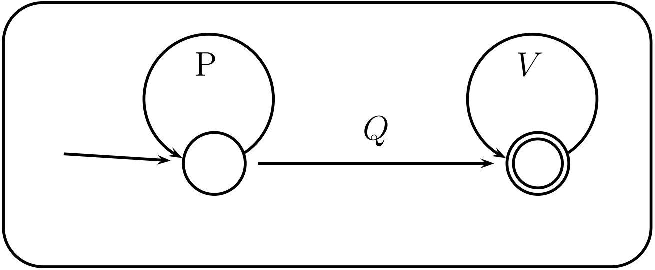


gilt

$$\xi \in L^\omega(\mathcal{A}_{dbp}) \quad \Leftrightarrow \quad \xi \models \Diamond\Box p$$

Automat für p **U** q

Für den Automaten $\mathcal{A}_{puntilq}$

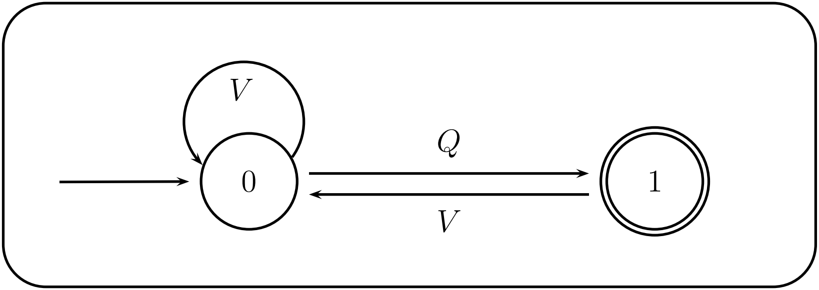


gilt

$$\xi \in L^\omega(\mathcal{A}_{puntilq}) \quad \Leftrightarrow \quad \xi \models p\,\mathbf{U}\,q$$

Automat für $\Box\Diamond q$

Für den Automaten $\mathcal{A}_{infq}$



gilt

$$\xi \in L^\omega(\mathcal{A}_{infq}) \quad \Leftrightarrow \quad \xi \models \Box\Diamond q$$

Lemma

Automat für Konjunktion

Seien

$$\mathcal{A}_1 = (S_1, V, s_1^0, \delta_1, F_1),$$
$$\mathcal{A}_2 = (S_2, V, s_2^0, \delta_2, F_2)$$

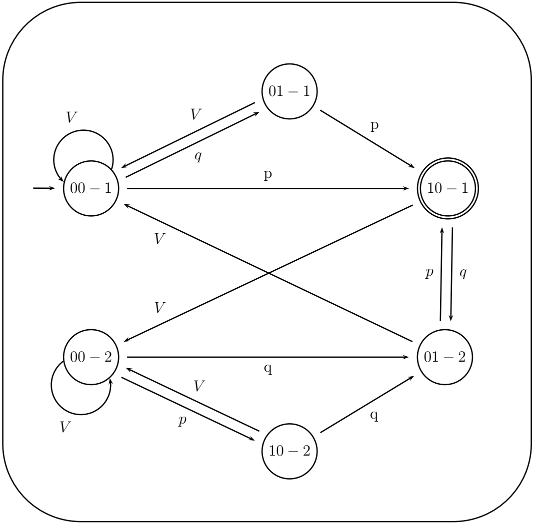
Büchi-Automaten,
C_1, C_2 LTL-Formeln mit

$$\mathcal{A}_1 \models C_1$$
$$\mathcal{A}_2 \models C_2$$

Dann gibt es einen Büchi-Automaten $\mathcal{C}$ mit

$$\mathcal{C} \models C_1 \wedge C_2$$

Automat für $\Box\Diamond p \wedge \Box\Diamond q$



Allgemeine Konstruktion für Konjunktionsautomaten

Gegeben $\mathcal{A}_i = (S_i, s_i^0, \delta_i, F_i)$
Gesucht $\mathcal{C} = (S, s^0, \delta, F)$ mit $L^\omega(\mathcal{C}) = L^\omega(\mathcal{A}_1) \cap L^\omega(\mathcal{A}_2)$.

$$
\begin{array}{lcl}
S & = & S_1 \times S_2 \times \{1,2\} \\
s^0 & = & (s_1^0, s_2^0, 1) \\
F & = & F_1 \times S_2 \times \{1\} \\
\text{falls } s_1 \in F_1 \text{ und } i = 1 & & \\
(t_1, t_2, 2) \in \delta((s_1, s_2, i), a) & \Leftrightarrow & t_1 \in \delta_1(s_1, a) \text{ und } t_2 \in \delta_2(s_2, a) \\
\text{falls } s_2 \in F_2 \text{ und } i = 2 & & \\
(t_1, t_2, 1) \in \delta((s_1, s_2, i), a) & \Leftrightarrow & t_1 \in \delta_1(s_1, a) \text{ und } t_2 \in \delta_2(s_2, a) \\
\text{sonst} & & \\
(t_1, t_2, i) \in \delta((s_1, s_2, i), a) & \Leftrightarrow & i \in \{1,2\}, \\
 & & t_1 \in \delta_1(s_1, a) \text{ und } t_2 \in \delta_2(s_2, a)
\end{array}
$$

Theorem

Zu jeder LTL-Formel

$$B$$

gibt es einen – effektiv konstruierbaren – Büchi-Automaten

$$\mathcal{A}_B$$

mit

$$L^\omega(\mathcal{A}_B) = \{\xi \in V^\omega \mid \xi \models B\}$$

Beweis: Siehe Skriptum

Korollar

Erfüllbarkeit und Allgemeingültigkeit von LTL Formeln ist entscheidbar.

Korollar

Erfüllbarkeit und Allgemeingültigkeit von LTL Formeln ist entscheidbar.

Beweis:

Korollar

Erfüllbarkeit und Allgemeingültigkeit von LTL Formeln ist entscheidbar.

Beweis:

Man konstruiert die Büchi-Automaten $\mathcal{A}_B$ und $\mathcal{A}_{\neg B}$. Es gilt

$$\begin{array}{lcl} B \text{ ist erfüllbar} & \Leftrightarrow & L^\omega(\mathcal{A}_B) \neq \emptyset \\ B \text{ ist allgemeingültig} & \Leftrightarrow & L^\omega(\mathcal{A}_{\neg B}) = \emptyset \end{array}$$

Für jeden Büchi-Automaten $\mathcal{C}$ ist die Frage $L^\omega(\mathcal{C}) = \emptyset$? entscheidbar.