Klausur Formale Systeme

Fakultät für Informatik

WS 2011/2012

Prof. Dr. Peter H. Schmitt

14. Februar 2012

Name: ______________________

Vorname: ______________________

Matrikel-Nr.: ______________________

☐ Ich bin damit einverstanden, dass mein Klausurergebnis unter meiner Matrikelnummer in den Ergebnis-Aushang am Institut aufgenommen wird.

Andernfalls können Sie das Ergebnis persönlich erfragen.

Die Bearbeitungszeit beträgt 60 Minuten.

A1 (13)	A2 (9)	A3 (6)	A4 (4)	A5 (10)	A6 (9)	A7 (9)	Σ (60)

Bewertungstabelle bitte frei lassen!

Zum Bestehen der Klausur sind 20 der erreichbaren 60 Punkte hinreichend.

Bonus: ______ **Gesamtpunkte:** ☐

1 Zur Einstimmung (5+5+3 Punkte)

a. Bitte kreuzen Sie in der folgenden Tabelle die für die prädikatenlogischen Formeln zutreffende Eigenschaft an. Für korrekte Antworten erhalten Sie einen Punkt, **für falsche Antworten wird ein halber Punkt abgezogen**. Dabei werden jedoch nie weniger als 0 Punkte für die Tabelle vergeben. r, s, t sind nullstellige Prädikatensymbole, p, q sind einstellige Prädikatensymbole, f, g sind einstellige Funktionssymbole, a ist ein Konstantensymbol, die übrigen Bezeichner sind Variablen.

	keine Formel der PL1	erfüllbar (aber nicht allgemeing.)	allgemeingültig (und erfüllbar)	unerfüllbar
$\big[(\forall x\ p(x)) \leftrightarrow (\forall x\ q(x))\big] \to \big[\forall x(p(x) \leftrightarrow q(x))\big]$				
$r \to (\neg s \to (\neg r \to t))$				
$(\forall x\ p(x)) \wedge (\exists x\ \neg p(x))$				
$f \doteq g \to (\forall x \exists y\ f(x) \doteq g(y))$				
$\Big[\big(\forall x\ p(f(x))\big) \wedge \big(\exists y\ f(y) \doteq a\big)\Big] \to p(a)$				

b. Bitte kreuzen Sie in der folgenden Tabelle das Zutreffende an. Für korrekte Antworten erhalten Sie einen Punkt, **für falsche Antworten wird ein Punkt abgezogen**. Dabei werden jedoch nie weniger als 0 Punkte für diese Teilaufgabe vergeben.

	Richtig	Falsch
Sei $T \subseteq Term_\Sigma$. Hat T keinen allgemeinsten Unifikator, so hat T keinen Unifikator.		
Für jede modallogische Formel A und Kripkestruktur (S, R, I) gilt: Wenn $(S, R, I) \models A$ gilt, dann gilt auch $(S, R, I) \models \Box A$.		
Für jede LTL-Formel A und ω-Struktur $(\mathbb{N}, <, \xi)$ gilt: Wenn $\xi \models A$ gilt, dann gilt auch $\xi \models \Box A$.		
Für jede Kripkestruktur (S, R, I) gilt: Wenn $(S, R, I) \models \Box A \to \Box\Box A$ gilt, dann ist R eine transitive Relation.		
Für jede Kripkestruktur $\mathcal{K}$ und jeden Zustand s gilt: $(\mathcal{K}, s) \models \Box A \to \Box\Box A$ genau dann, wenn $(\mathcal{K}, s) \models \Diamond\Diamond\neg A \to \Diamond\neg A$.		

c. Bitte ergänzen Sie in den folgenden Aussagen das fehlende Wort so, dass die enstehenden Aussagen korrekt sind. Für jede korrekte Antwort erhalten Sie einen Punkt (und **für falsche Antworten keinen Abzug**) in dieser Teilaufgabe.

i. Ein Unifikator μ, für den es für jeden Unifikator τ eine Substitution σ gibt, so dass $\tau = \sigma \circ \mu$, heißt __________ Unifikator.

ii. Die modallogische Formel $\Diamond\Box p \to p$ charakterisiert die Klasse der __________ Kripkerahmen.

iii. Sei $(D, \succ)$ ein Reduktionsystem, $\to$ bezeichne die reflexiv transitive Hülle von $\succ$. Das Reduktionssystem heißt __________ genau dann, wenn gilt: Für alle $s, t, u \in D$ mit $s \succ t$ und $s \succ u$ gibt es ein $v \in D$ mit $t \to v$ und $u \to v$.

Name:
Matr.-Nr.:

2 Shannon-Graphen (BDDs) (6+3 Punkte)

Sei F_2^n eine Formel über Atomen $A_1, \ldots, A_n$ die genau dann erfüllt ist, wenn **genau zwei** Atome aus $A_1, \ldots, A_n$ zu wahr auswerten.

a. Konstruieren Sie den (bis auf Isomorphie eindeutigen) reduzierten Shannon-Graphen (OBDD) von F_2^5 zu der Variablen-Ordnung $A_1 < \ldots < A_5$.

b. Wie viele innere Knoten (d. h. Knoten, die nicht $\boxed{\mathbf{0}}$ oder $\boxed{\mathbf{1}}$ sind) besitzt der (bis auf Isomorphie eindeutige) reduzierte Shannon-Graph zu F_2^{10} (zu der Variablen-Ordnung $A_1 < \ldots < A_{10}$)?

3 Formalisieren in Prädikatenlogik (1+1+1+2+1 Punkte)

Wir betrachten als Universum einen bestimmten Personenkreis, in dem die folgenden Eigenschaften **a.** bis **e.** gelten. Formalisieren Sie diese in Prädikatenlogik erster Stufe mit Gleichheit. Benutzen Sie dabei jeweils nur die angegebenen Prädikat- und Funktionssymbole. Die Bedeutung der Symbole ist wie folgt festgelegt:

Prädikat	Bedeutung	Funktion	Bedeutung
$frau(x)$	x ist eine Frau	$mutter(x)$	Die Mutter von x
$mann(x)$	x ist ein Mann	$vater(x)$	Der Vater von x
$ehe(x,y)$	Frau x ist verheiratet mit Mann y		

a. Jeder ist entweder eine Frau oder ein Mann (aber nicht beides).
benötigte Prädikate: $frau(\cdot)$, $mann(\cdot)$

b. Jede Ehe ist zwischen einer Frau (1. Parameter) und einem Mann (2. Parameter).
benötigte Prädikate: $frau(\cdot)$, $mann(\cdot)$, $ehe(\cdot,\cdot)$

c. Nicht alle Männer sind verheiratet.
benötigte Prädikate: $mann(\cdot)$, $ehe(\cdot,\cdot)$

d. Jeder Mann ist höchstens mit einer Frau verheiratet.
benötigte Prädikate: $ehe(\cdot,\cdot)$

e. Die Eltern jeder Person sind miteinander verheiratet.
benötigte Prädikate und Funktionen: $mutter(\cdot)$, $vater(\cdot)$, $ehe(\cdot,\cdot)$

4 Unifikation (2+2 Punkte)

Seien

- f ein zweistelliges Funktionssymbol,
- g ein einstelliges Funktionssymbol,
- c ein nullstelliges Funktionssymbol,
- p ein zweistelliges Prädikatensymbol,
- r ein einstelliges Prädikatensymbol und
- x, y, z Variablen.

Geben Sie für die folgenden Paare von Termen einen allgemeinsten Unifikator μ an (als *eine* Substitution und nicht als Verkettung von Substitutionen). Falls es keinen allgemeinsten Unifikator gibt, begründen Sie, warum es keinen gibt!

a. $f(x, g(f(x, f(z, c))))$ und
$f(g(y), g(y))$

b. $f(g(z), g(f(x, f(z, c))))$ und
$f(x, g(f(g(c), y)))$

5 Tableaukalkül (10 Punkte)

Vervollständigen Sie den folgenden, noch nicht geschlossenen, Tableaubeweis. Notieren Sie dabei:

- bei jeder Erweiterung, durch welche Regelanwendung eine Formel auf dem Tableau enstanden ist,
- bei Abschlüssen die beiden Partner,
- die schließende Substitution.

$$0(\forall z\ \exists y\ \forall x\ (p(x,y) \leftrightarrow (p(x,z) \land \neg p(x,x))) \to \neg\exists w\ \forall x\ p(x,w))\ {}_{1}$$

$$|$$

$$1\forall z\ \exists y\ \forall x\ (p(x,y) \leftrightarrow (p(x,z) \land \neg p(x,x)))\ {}_{2[\alpha(1)]}$$

$$|$$

$$0\neg\exists w\ \forall x\ p(x,w)\ {}_{3[\alpha(1)]}$$

Zur Erinnerung: Die folgende Tableauregel ist vollständig und korrekt:

$$\frac{\mathbf{1}\ A \leftrightarrow B}{\begin{array}{c|c} \mathbf{1}A & \mathbf{0}A \\ \mathbf{1}B & \mathbf{0}B \end{array}}$$

6 Java Modeling Language (JML) (2+3+4 Punkte)

a. Geben Sie in natürlicher Sprache wieder, was der folgende JML-Methodenvertrag für die Methode `m` aussagt:

```
/*@ public normal_behaviour
  @   requires (\forall i; 0<=i && i<a.length; a[i] >= 0);
  @   ensures (\forall i; 0<=i && i<a.length; \old(a[a.length-1-i]) == a[i]);
  @*/
void m(int[] a) { ... }
```

b. Gegeben sei die folgende Javaklasse `Knoten`, mit der eine einfach verkettete Liste realisiert wird:

```
class Knoten {
    Knoten nachfolger;
    int laenge;
    /*@ invariant
      @
      @
      @
      @*/
}
```

Ergänzen Sie die Klasse `Knoten` um eine JML-Klasseninvariante, die Folgendes besagt:

> Wenn ein Knoten keinen Nachfolger hat (also auf die `null` Referenz verwiesen wird), so hat er die Länge 1. Wenn ein Knoten einen Nachfolger hat, so ist seine Länge um genau eins größer als die seines Nachfolgers.

Name:
Matr.-Nr.:

Fortsetzung zu Aufgabe 6

c. Vervollständigen Sie den nachstehenden JML-Methodenvertrag, so dass er Folgendes besagt:

> Wird die Methode `findDup` mit einem Feld als Argument aufgerufen, in dem es (mindestens) eine Stelle gibt, an der zwei aufeinanderfolgende Indizes dieselbe Zahl enthalten, so wird folgendes Ergebnis geliefert: Ein Index in das Feld, so dass der Wert an dieser Stelle und an der nachfolgenden Stelle gleich ist.

```
/*@ public normal_behaviour
  @
  @
  @   requires
  @
  @
  @   ensures
  @   assignable \nothing;
  @*/
int findDup(int a[]) { ... }
```

7 LTL und Büchi (1+4+4 Punkte)

Seien p und q aussagenlogische Variablen. Dann ist die Semantik der LTL-Formel $p\,\mathbf{C}\,q$ (“p causes q”) folgendermaßen definiert:

$$\xi \models p\,\mathbf{C}\,q :\iff \text{Für jedes } n \in \mathbb{N}, \text{ für das } \xi_n \models p \text{ gilt, gibt es ein } k \geq n, \text{ so dass } \xi_k \models q.$$

a. Geben Sie eine zu $p\,\mathbf{C}\,q$ äquivalente LTL-Formel an, die $\mathbf{C}$ nicht verwendet.

b. Geben Sie einen Büchi-Automaten $\mathcal{A}_{\mathbf{C}}$ über dem Alphabet $V = \{\emptyset, \{p\}, \{q\}, \{p,q\}\}$ an, der genau $p\,\mathbf{C}\,q$ akzeptiert, d.h. dass $L^\omega(\mathcal{A}_{\mathbf{C}}) = \{\xi \in V^\omega : \xi \models p\,\mathbf{C}\,q\}$ gilt.

Sie können folgende Mengenschreibweise benutzen:

$$\begin{array}{lcl@{\qquad}lcl} V & = & \{\emptyset, \{p\}, \{q\}, \{p,q\}\} & Q & = & \{\{q\}, \{p,q\}\} \\ P & = & \{\{p\}, \{p,q\}\} & \overline{Q} & = & \{\emptyset, \{p\}\} \\ \overline{P} & = & \{\emptyset, \{q\}\} & PQ & = & \{\{p,q\}\} \end{array}$$

(Hinweis: Zwei Zustände reichen aus für solch einen Automaten. Sie dürfen aber auch mehr verwenden.)

c. Geben Sie eine LTL-Formel an, die ausdrückt:

> Für jedes $n \in \mathbb{N}$, für das $\xi_n \models p$ gilt, gibt es ein $k \geq n$, so dass gilt: Für jedes $i \geq k$, für das $\xi_i \models q$ gilt, gibt es ein $j \geq i$, so dass $\xi_j \models p$.

(Hinweis: Sie dürfen den Operator $\mathbf{C}$ verwenden.)