Klausur Formale Systeme

Fakultät für Informatik

WS 2016/2017

Prof. Dr. Bernhard Beckert

3. März 2017

Name: ______________________

Vorname: ______________________

Matrikel-Nr.: ______________________

Die Bearbeitungszeit beträgt 60 Minuten.

A1 (14)	A2 (7)	A3 (6)	A4 (8)	A5 (10)	A6 (8)	A7 (7)	Σ (60)

Bewertungstabelle bitte frei lassen!

Gesamtpunkte:

MUSTERLSG

1 Zur Einstimmung (5+5+4 = 14 Punkte)

a. Kreuzen Sie in der folgenden Tabelle alles Zutreffende an.

Für jede korrekte Antwort gibt es einen Punkt, **für jede falsche Antwort wird ein *halber Punkt* abgezogen!** (Dabei werden jedoch keinesfalls weniger als 0 Punkte für diese Teilaufgabe vergeben.)

Hinweise:

- „PL1“ steht für „Prädikatenlogik erster Stufe (mit Gleichheit $\doteq$)“, wie sie in der Vorlesung vorgestellt wurde. Auf diese beziehen sich in Teilaufgabe a. auch die Begriffe „erfüllbar“, „allgemeingültig“ und „unerfüllbar“.
- p, q, r, s und t sind Prädikatensymbole, f ist ein Funktionssymbol, c ist ein Konstantensymbol und x, y sind Variablen.
- Es gelten die üblichen Klammereinsparungsregeln.

	keine Formel der PL1	allgemeingültig	erfüllbar, aber nicht allgemeingültig	unerfüllbar
$\exists x\,(\neg(x \doteq c) \wedge \forall y\,(f(x) \doteq y))$				X
$\forall x\,\big((p(x) \to q(x,x)) \vee (q(x,x) \to p(x))\big)$		X		
$(r \to s) \to \exists t\,((r \to t) \wedge (t \to s))$	X			
$\forall x\,\forall y\,\big((p(x) \wedge p(y)) \to (x \doteq y)\big)$			X	
$\forall x\,\forall y\,(q(x,y) \wedge \neg q(y,x))$				X

b. Bitte kreuzen Sie in der folgenden Tabelle das Zutreffende an. Für korrekte Antworten erhalten Sie einen Punkt, **für falsche Antworten wird *ein Punkt* abgezogen**. Dabei werden jedoch nie weniger als 0 Punkte für diese Teilaufgabe vergeben.

	Richtig	Falsch
Enthält jede Klausel einer aussagenlogischen Klauselmenge K höchstens ein positives Literal, so lässt sich die Erfüllbarkeit von K in Polynomialzeit überprüfen.	X	
Seien F_1 und F_2 aussagenlogische Tautologien. Dann sind die entsprechenden reduzierten Shannongrafen G_1 bzw. G_2 isomorph zueinander.	X	
Mit Hilfe eines vollständigen Kalküls kann man für jede prädikatenlogische Formel F zeigen, dass entweder F oder $\neg F$ unerfüllbar ist.		X
Es gibt Formeln die man aus den Peano-Axiomen ableiten kann, die für die Struktur $\langle \mathbb{N}, +, *, 0, 1 \rangle$ falsch sind.		X
Ein endliches Termersetzungssystem besitzt bis auf Variantenbildung nur endlich viele kritische Paare.	X	

MUSTERLÖSUNG

Fortsetzung 1 Zur Einstimmung

c. Die aussagenlogische Signatur $\Sigma_n = \{P_1, \ldots, P_n\}$ bestehe aus genau n aussagenlogischen Variablen.

Wie viele semantisch verschiedene aussagenlogische Formeln gibt es in $\mathit{For0}_{\Sigma_n}$ – also Formeln, die (paarweise) nicht zueinander logisch äquivalent sind (syntaktische Unterschiede genügen nicht)?

Begründen Sie Ihre Antwort!

Lösung:

Es gibt 2^{2^n} semantisch verschiedene Formeln.

Begründung: Zwei Formeln sind genau dann semantisch verschieden, wenn sie verschiedene Wertetabellen haben. Eine Wertetabelle hat 2^n Zeilen, in denen jeweils der entsprechende Wahrheitswert 0 oder 1 der Formel eingetragen ist. Also gibt es 2^{2^n} verschiedene Wertetabellen und Formeln.

Alternative Begründung: Es gibt 2^n verschiedene Klauseln, die vollständig sind, in denen also jede der Variablen vorkommt. Durch Hinzufügen oder Weglassen jeder dieser Klauseln entsteht eine (semantisch) andere Formel.

MUSTERLSG

2 Die Schnittregel (2+3+2 = 7 Punkte)

Die sogenannte „Schnittregel“ für den Tableaukalkül hat die Form

$$\frac{}{0\,F \mid 1\,F}$$

Sie erlaubt, einen beliebigen Tableauast dadurch zu erweitern, dass man zwei Blätter anfügt, von denen eines mit $0\,F$ und das andere mit $1\,F$ markiert ist. Dabei ist F eine beliebige Formel.

a. Begründen Sie kurz, warum der Tableaukalkül korrekt bleibt, wenn man die Schnittregel hinzunimmt.

Lösung:

Der Korrektheitsbeweis des Tableaukalküls beruht darauf, zu zeigen, dass jede Regelanwendung die Erfüllbarkeit eines Tableaus erhält. Ein Tableau ist erfüllbar, wenn einer seiner Äste erfüllbar ist.

Darum ist nur zu zeigen: Ist ein Ast erfüllbar und wird er mit der Schnittregel erweitert, dann ist er wieder erfüllbar. Das ist aber trivial richtig, weil in jedem Modell entweder $0\,F$ oder $1\,F$ wahr ist.

b. Die Schnittregel wird auch Lemma-Regel genannt. Warum ist das ein sinnvoller Name für diese Regel?

Lösung:

Wenn man unter dem Ast, der $0\,F$ enthält, ein geschlossenes (Teil-)Tableau kontruiert hat, hat man bewiesen, dass F allgemeingültig ist (im Kontext des Astes, auf den die Schnittregel angewendet wurde). Betrachtet man F als Lemma, entspricht dieser Teilbeweis dem Beweis des Lemmas. Auf dem Ast, der $1\,F$ enthält, kann man dann F zum Abschluss verwenden. Dies entspricht der Verwendung des Lemmas.

c. Für manche Formeln ist der kürzeste Tableaubeweis mit Schnittregel sehr viel kürzer als der kürzeste Beweis ohne Schnittregel.

Warum wird dennoch für das *vollautomatische* Beweisen die Schnittregel zumeist *nicht* verwendet?

Lösung:

Die Schnittregel ist eine nicht-analytische Regel, da sie eine Formel F einführt, die zuvor nicht vorkam. Es ist sehr schwierig, eine Formel (ein Lemma) F zu finden, mit der der Tableaubeweis tatsächlich kürzer wird. Vollautomatische Beweiser sind dazu nicht in der Lage, da sie keine Einsicht in die Bedeutung der zu beweisenden Formel haben. Wählt man aber ein nicht hilfreiches Lemma, ist der nötige Aufwand für den Beweis des Lemmas (den Abschluss des zusätzlichen Astes) ohne Nutzen.

MUSTERLSG

3 Modallogik (2+2+2 = 6 Punkte)

Für diese Aufgabe betrachten wir eine Modallogik, in der

$\Box_A F$

als

A weiß, dass F gilt

interpretiert wird.

P sei eine aussagenlogische Variable.

Geben Sie die Bedeutung folgender Formeln in natürlicher Sprache wieder:

a. $P \to \Box_A P$

Wenn P gilt, dann weiß A, dass P gilt.

b. $\Box_A \Box_B \neg \Box_A P$

A weiß, dass B weiß, dass A nicht weiß, dass P gilt.

c. $\neg \Diamond_A \Box_B P$

A weiß, dass B nicht weiß, dass P gilt.

MUSTERLSG

4 Formalisieren in PL1 (2+2+2+2 = 8 Punkte)

Gegeben sei die prädikatenlogische Signatur $\Sigma = (\{\mathit{befreundet}\}, \{\mathit{vater}, \mathit{adam}\}, \alpha)$. Sie enthält das zweistellige Prädikatensymbol $\mathit{befreundet}(\cdot, \cdot)$, das einstellige Funktionssymbl $\mathit{vater}(\cdot)$ und die Konstante adam.

Zur Auswertung der Formeln werden nur solche Interpretationen (D, I) über Σ verwendet, in denen

- das Universum D die Menge der Menschen ist,
- das Prädikat *befreundet* symmetrisch ist und für zwei Menschen wahr ist, wenn sie befreundet sind,
- die einstellige Funktion *vater* den Vater eines Menschens bezeichnet,
- die Konstante *adam* einen Mensch namens Adam repräsentiert.

Geben Sie jeweils eine Formel der Prädikatenlogik mit Gleichheit über Σ an, die folgende Sachverhalte darstellt:

a. Es gibt keinen Menschen, der mit Adam befreundet ist.

$\boxed{\forall x \neg befreundet(adam, x)}$

b. Wenn die Väter von zwei Menschen befreundet sind, dann sind diese zwei Menschen nicht befreundet.

$\boxed{\forall x \forall y\, (befreundet(vater(x), vater(y)) \to \neg befreundet(x, y))}$

c. Jeder Mensch ist mit dem Vater seines Vaters befreundet.

$\boxed{\forall x (befreundet(x, vater(vater(x)))}$

d. Adam ist der Vater von genau zwei Menschen.

$\boxed{\exists x \exists y\, (\neg(x \doteq y) \land (vater(x) \doteq adam) \land (vater(y) \doteq adam) \land \forall z\, ((vater(z) \doteq adam) \to (z \doteq x \lor z \doteq y)))}$

MUSTERLSG

5 Tableaukalkül (5+5 = 10 Punkte)

a. Vervollständigen und schließen Sie den folgenden Tableau-Beweis.

Notieren Sie dabei:

- den Regeltyp $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ und die Formel, auf die eine Regel angewendet wird,
- bei Abschlüssen die beiden Partner,
- sowie die schließende Substitution.

$$1\ \forall x\, \exists y\, p(x, f(y)) \quad (1)$$
$$|$$
$$1\ \exists x\, \forall y\, \neg p(f(x), y) \quad (2)$$
$$|$$
$$1\ \exists y\, p(X, f(y)) \quad (3[\gamma(1)])$$
$$|$$
$$1\ p(X, f(g(X))) \quad (4[\delta(3)])$$
$$|$$
$$1\ \forall y\, \neg p(f(c), y) \quad (5[\delta(2)])$$
$$|$$
$$1\ \neg p(f(c), Y) \quad (6[\gamma(5)])$$
$$|$$
$$0\ p(f(c), Y) \quad (7[\alpha(6)])$$
$$|$$
$$* \quad (8[7,4])$$

Schließende Substitution: $\sigma = \{X/f(c),\ Y/f(g(f(c)))$

MUSTERLSG

Fortsetzung 5 Tableaukalkül

b. Vervollständigen und schließen Sie den folgenden Tableau-Beweis.

Notieren Sie dabei:

- den Regeltyp ($\alpha, \beta, \gamma, \delta$) und die Formel, auf die eine Regel angewendet wird,
- bei Abschlüssen die beiden Partner,
- sowie die schließende Substitution.

$$1\ \forall x\, \forall y\, p(x,y) \quad (1)$$
$$1\ \forall x\, \forall y\, \exists z\, (p(x,y) \to \neg p(x,z)) \quad (2)$$
$$1\ \forall y\, \exists z\, (p(X_1,y) \to \neg p(X_1,z)) \quad (3[\gamma(2)])$$
$$1\ \exists z\, (p(X_1,Y_1) \to \neg p(X_1,z)) \quad (4[\gamma(3)])$$
$$1\ (p(X_1,Y_1) \to \neg p(X_1,f(X_1,Y_1))) \quad (5[\delta(4)])$$

$$1\ \neg p(X_1,Y_1) \quad (6[\beta(5)])$$
$$0\ (p(X_1,Y_1) \quad (7[\alpha(6)])$$
$$1\ \forall y\, (p(X_2,y) \quad (8[\gamma(1)])$$
$$1\ (p(X_2,Y_2) \quad (9[\gamma(8)])$$
$$* \quad (10[7,9])$$

$$1\ \neg p(X_1,f(X_1,Y_1)) \quad (11[\beta(5)])$$
$$0\ p(X_1,Y_1) \quad (12[\alpha(11)])$$
$$1\ \forall y\, p(X_3,y) \quad (13[\gamma(1)])$$
$$1\ p(X_3,Y_3) \quad (14[\gamma(13)])$$
$$* \quad (15[12,14])$$

Schließende Substitution: $\sigma = \{X_2/X_1,\ Y_2/Y_1,\ X_3/X_1,\ Y_3/f(X_1,Y_1)\}$

MUSTERLSG

6 Spezifikation mit der Java Modeling Language (2+3+3 = 8 Punkte)

Folgende in Java implementierte Klasse sei gegeben:

```
class Routing {
  int[][] network;
  int[][] distance;
  // ...
}
```

Dabei modelliert das Array `network` die Längen der Leitungen zwischen Sendern und Empfängern, also für Sender `i` und Empfänger `j` bezeichnet `network[i][j]` die Länge der Leitung von `i` nach `j` (0 steht für „nicht verbunden"). Im Array `distance` bezeichnet ein Eintrag `distance[i][j]` die Länge der kürzesten Route von `i` nach `j` (als Ergebnis einer Kürzeste-Wege-Suche im Array `network`).

Im Folgenden können Sie von einem zusammenhängenden Netzwerk ausgehen, d.h., von jedem Sender existiert zu jedem Empfänger eine kürzeste Route. Außerdem gehen wir davon aus, dass die Arrays `network` und `distance` gleich groß sind.

a. Formalisieren Sie eine Invariante für die Klasse `Routing`, die folgenden Sachverhalt beschreibt:

> Jeder Eintrag des Arrays `distance` ist kleiner oder gleich dem entsprechenden Eintrag des Arrays `network`, wenn der Eintrag in `network` von 0 verschieden ist.

```
/*@ invariant
  @
  @
  @
  @*/
```

```
  @ (\forall int i; 0 <= i && i < network.length;
  @   (\forall int j; 0 <= j && j < network[i].length;
  @     network[i][j] != 0 ==> distance[i][j] <= network[i][j]));
```

MUSTERLSG

Fortsetzung 6 Spezifikation mit der Java Modeling Language

b. Formalisieren Sie eine Invariante für die Klasse `Routing`, die folgenden Sachverhalt beschreibt:

Zwischen zwei beliebigen Sendern/Empfängern gibt es (mindestens) eine Route, die aus genau drei Leitungen besteht.

Hinweis: Hierbei muss es sich nicht um die kürzeste Route handeln.

```
/*@ invariant
  @
  @
  @
  @
  @
  @
  @
  @
  @
  @*/
```

```
  @ (\forall int a; 0 <= a && a < network.length;
  @   (\forall int b; 0 <= b && b < network.length
  @                             && b < network[a].length;
  @     (\exists int i; 0 <= i && i < network.length
  @                             && i < network[a].length;
  @       (\exists int j; 0 <= j && j < network.length
  @                             && j < network[i].length;
  @             network[a][i] != 0 && network[i][j] != 0
  @          && network[j][b] != 0))));
```

MUSTERLSG

Fortsetzung 6 Spezifikation mit der Java Modeling Language

c. Geben Sie die Bedeutung der folgenden Klasseninvariante in natürlicher Sprache wieder:

```
/*@ invariant
  @ (\forall int a; 0 <= a && a < distance.length;
  @   (\forall int b; 0 <= b && b < distance.length;
  @     !(\exists int j; 0 <= j && j < distance[a].length;
  @          distance[a][j] > 2 * distance[b][j])));
  @*/
```

Für beliebige Sender a und b gibt es keinen Empfänger, für den die kürzeste Route von a mehr als zweimal so lang ist wie die kürzeste Route von b.

MUSTERLSG

7 Lineare Temporal Logik (LTL) ((3+2)+2 = 7 Punkte)

a. **i.** Die folgende LTL-Formel ist **nicht** allgemeingültig.

$$(\Box P \to \Box Q) \to (Q \; \mathbf{U} \; \neg P)$$

Dabei sind P und Q logische Variablen. Geben Sie zum Beweis ein Gegenbeispiel an: eine ω-Struktur, in der die Formel falsch ist. Es genügt dazu, die Variablenbelegung für den Anfang der Strukur in folgende Abbildung einzutragen:

Gegenbeispiel: $1 \to 2 \to 3 \to \cdots$

$1 \to P, \neg Q \qquad 2 \to \neg P, Q$

ii. Die folgende Formel dagegen **ist** allgemeingültig:

$$(Q \; \mathbf{U} \; \neg P) \to (\Box P \to \Box Q)$$

Dabei sind P und Q logische Variablen. Füllen Sie die Lücken in der nachfolgenden Begründung für die Allgemeingültigkeit der Formel.

Wenn in einem Modell $(Q \; \mathbf{U} \; \neg P)$ wahr ist, dann ist auch die Formel $\Diamond \neg P$ (1) wahr.

(1) ist äquivalent zur Negation von $\Box P$ (2).

Wenn in einem Modell die Negation von (2) wahr ist, dann ist die Implikation $(\Box P \to \Box Q)$ trivialer Weise wahr.

b. Formalisieren Sie folgenden Sachverhalt in LTL.

Immer wenn es mal wieder *sonnig* ist, bleibt es *sonnig* bis es eventuell *regnet* (Es muss nicht unbedingt regnen).

$$\Box(\mathit{sonnig} \Rightarrow (\mathit{sonnig} \; \mathbf{U}_w \; \mathit{regnet}))$$

MUSTERLSG